ソフトウェア構成特論 第10回

大学院理工学研究科 電気電子情報工学専攻　篠埜 功

1　はじめに

今回は単純型付きラムダ計算のいくつかの性質について紹介する。

2　単純型付きラムダ計算の性質

算術式のときと同様、まず inversion 補題を示す。

補題 1 (Inversion)**.**

1. $\Gamma \vdash \mathtt{x} : \mathtt{R}$ ならば $\mathtt{x}{:}\mathtt{R} \in \Gamma$
2. $\Gamma \vdash \lambda\mathtt{x} : \mathtt{T}_1.\mathtt{t}_2 : \mathtt{R}$ ならば何らかの型 $\mathtt{R}_2$ について $\mathtt{R} = \mathtt{T}_1 \to \mathtt{R}_2$ であり $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{R}_2$
3. $\Gamma \vdash \mathtt{t}_1\ \mathtt{t}_2 : \mathtt{R}$ ならば何らかの型 $\mathtt{T}_{11}$ に対し $\Gamma \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{T}_{11} \to \mathtt{R}$ かつ $\Gamma \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{T}_{11}$
4. $\Gamma \vdash \mathtt{true} : \mathtt{R}$ ならば $\mathtt{R} = \mathtt{Bool}$
5. $\Gamma \vdash \mathtt{false} : \mathtt{R}$ ならば $\mathtt{R} = \mathtt{Bool}$
6. $\Gamma \vdash \mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3 : \mathtt{R}$ ならば $\Gamma \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{Bool}$ かつ $\Gamma \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{R}$ かつ $\Gamma \vdash \mathtt{t}_3 : \mathtt{R}$

証明. 型付け関係の定義から明らか。 □

前回提示した単純型付きラムダ計算では、ラムダ抽象の束縛変数部分にのみ型を書いたが、これで term の型が一意に定まる。

定理 1 (型の一意性)**.** 与えられた型環境 Γ において、term $\mathtt{t}$（$\mathtt{t}$ 中の自由変数は全部 $dom(\Gamma)$ に属する）はもし型を持つならそれは一意に定まり、その型判定の導出木も一意に定まる。

証明. 省略する。 □

次に標準形の補題を示す。

補題 2 (標準形 (Canonical form))**.**

1. $\mathtt{v}$ が $\mathtt{Bool}$ 型の値ならば $\mathtt{v}$ は $\mathtt{true}$ か $\mathtt{false}$ である。
2. $\mathtt{v}$ が $\mathtt{T}_1 \to \mathtt{T}_2$ 型の値ならば何らかの変数 $\mathtt{x}$ および term $\mathtt{t}_2$ に対し、$\mathtt{v} = \lambda\mathtt{x} : \mathtt{T}_1.\mathtt{t}_2$ である。

証明. 省略する。 □

この補題を用いることにより、progress 定理を示す。

定理 2 (Progress). $\mathtt{t}$ が自由変数を持たない term で型を持つとする。つまり、何らかの型 $\mathtt{T}$ に対して $\vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ が成り立つとする。このとき、$\mathtt{t}$ は値であるか、あるいは何らかの term $\mathtt{t}'$ について $\mathtt{t} \to \mathtt{t}'$ が成り立つ。

この定理は、自由変数を持たないという条件が必要。例えば、$\mathtt{f\ true}$ は正規形でかつ値ではないが、型環境 $\mathtt{f} : \mathtt{Bool} \to \mathtt{Bool}$ について型 $\mathtt{Bool}$ を持つ。つまり、型判定 $\mathtt{f} : \mathtt{Bool} \to \mathtt{Bool} \vdash \mathtt{f\ true} : \mathtt{Bool}$ が成立する。実際に健全性を示したいのは、完成したプログラム全体についてであり、プログラム全体は自由変数を持たず、特に問題はない。

証明. この命題を、型判定 $\Gamma \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ の導出木 $\dfrac{\cdots}{\Gamma \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}}$ に関する性質 P とする。型環境が空に限らない場合で性質 P を証明するが、あとの補足で述べるように、自由変数がない場合には型環境を空にした型判定も成り立つので問題ない。

$$P\left(\frac{\cdots}{\Gamma \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}}\right) \quad : \quad \mathtt{t}\text{ が自由変数を持たないならば}$$
$$\mathtt{t}\text{ は値であるかあるいは何らかの term }\mathtt{t}'\text{について }\mathtt{t} \to \mathtt{t}'\text{が成り立つ}$$

この性質 P を型判定 $\Gamma \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ の導出木の構造に関する帰納法で証明する。最後に使われた規則で場合分けをする。

T-TRUE の場合: $\mathtt{t}$ が値であり、性質 P は成立する。

T-FALSE の場合: $\mathtt{t}$ が値であり、性質 P は成立する。

T-IF の場合: 導出木の一番下の部分が

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{Bool} \qquad \Gamma \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{T} \qquad \Gamma \vdash \mathtt{t}_3 : \mathtt{T}}{\Gamma \vdash \mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3\ :\ \mathtt{T}}\ \text{(T-IF)}$$

という形をしている。$\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3$ は自由変数を持たないとする。この $\mathtt{if}$ 式の自由変数は、$\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2, \mathtt{t}_3$ の自由変数の和集合なので、$\mathtt{t}_1$ は自由変数を持たない。$\Gamma \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{Bool}$ の導出木に対して帰納法の仮定を適用する。$\mathtt{t}_1$ は値であるか、何らかの term $\mathtt{t}_1'$ について $\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}_1'$ が成立する。$\mathtt{t}_1$ が値の場合、標準形の補題 (補題 2) より $\mathtt{t}_1$ は $\mathtt{true}$ か $\mathtt{false}$ である。よって、E-IFTRUE か E-IFFALSE 規則により $\mathtt{t} \to \mathtt{t}_2$ か $\mathtt{t} \to \mathtt{t}_3$ が得られる。何らかの term $\mathtt{t}_1'$ について $\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}_1'$ が成立する場合は、E-IF 規則により $\mathtt{t} \to \mathtt{if}\ \mathtt{t}_1'\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3$ が得られる。

T-VAR の場合: 導出木が

$$\frac{\mathtt{x} : \mathtt{T} \in \Gamma}{\Gamma \vdash \mathtt{x}\ :\ \mathtt{T}}\ \text{(T-VAR)}$$

という形をしている。term $\mathtt{x}$ は自由変数を持つ（term $\mathtt{x}$ において $\mathtt{x}$ は自由変数）ので、性質 P の前提部分が成り立たないので性質 P は成り立つ。

T-ABS の場合: 導出木の一番下の部分が

$$\frac{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{t}_2\ :\ \mathtt{T}_2}{\Gamma \vdash \lambda\mathtt{x} : \mathtt{T}_1.\ \mathtt{t}_2\ :\ \mathtt{T}_1 \to \mathtt{T}_2}\ \text{(T-ABS)}$$

という形をしている。$\lambda\mathtt{x}:\mathtt{T}_1.\ \mathtt{t}_2$ は値であり性質 P は成立する。

T-APP の場合: 導出木の一番下の部分が

$$\frac{\Gamma\vdash\mathtt{t}_1\ :\ \mathtt{T}_{11}\to\mathtt{T}_{12}\qquad\Gamma\vdash\mathtt{t}_2\ :\ \mathtt{T}_{11}}{\Gamma\vdash\mathtt{t}_1\ \mathtt{t}_2\ :\ \mathtt{T}_{12}}\ \text{(T-APP)}$$

という形をしている。$\mathtt{t}_1\ \mathtt{t}_2$ は自由変数を持たないとする。この式の自由変数は $\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2$ の自由変数の和集合なので、$\mathtt{t}_1$ も $\mathtt{t}_2$ も自由変数を持たない。$\Gamma\vdash\mathtt{t}_1\ :\ \mathtt{T}_{11}\to\mathtt{T}_{12}$ の導出木に帰納法の仮定を適用する。$\mathtt{t}_1$ は値であるか、あるいは何らかの term $\mathtt{t}_1'$ について $\mathtt{t}_1\to\mathtt{t}_1'$ が成立する。次に $\Gamma\vdash\mathtt{t}_2\ :\ \mathtt{T}_{11}$ の導出木に帰納法の仮定を適用する。$\mathtt{t}_2$ は値であるか、あるいは何らかの term $\mathtt{t}_2'$ について $\mathtt{t}_2\to\mathtt{t}_2'$ が成立する。$\mathtt{t}_1$ が 1 ステップ評価できる場合は、term $\mathtt{t}$ に対して E-APP1 規則が適用できる。$\mathtt{t}_1$ が値で $\mathtt{t}_2$ が 1 ステップ評価できる場合は、term $\mathtt{t}$ に対して E-APP2 規則が適用できる。$\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2$ が両方とも値の場合は、標準形の補題（補題 2）より、term $\mathtt{t}_1$ は $\lambda\mathtt{x}:\mathtt{T}_{11}.\mathtt{t}_{12}$ の形をしており、term $\mathtt{t}$ に対して E-APPABS 規則が適用できる。 □

（補足）$\Gamma\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ かつ term $\mathtt{t}$ に自由変数がない場合、$\emptyset\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ が成立する（ことを証明できる）。

次は評価が型を保存すること (preservation) を示す。その準備としていくつかの補題を示す。最初の補題は、型環境中の要素（変数と型の対応関係）の順番を入れ替えてもよいというものである。

補題 3 (Permutation). $\Gamma\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ かつ Δ が Γ 中の要素の順番を変えた型環境ならば、$\Delta\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ が成り立ち、これら 2 つの型判定の導出木の深さは同じである。

証明. 型判定 $\Gamma\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ の導出に関する帰納法で証明できる。詳細は省略する。 □

補題 4 (Weakning). $\Gamma\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ かつ $\mathtt{x}\notin dom(\Gamma)$ ならば、$\Gamma,\mathtt{x}:\mathtt{S}\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ が成りたち、これら 2 つの型判定の導出木の深さは同じである。

証明. 型判定 $\Gamma\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ の導出に関する帰納法で証明できる。詳細は省略する。 □

これらの補題を用いて、substitution 補題を証明する。

補題 5 (Substitution). $\Gamma,\mathtt{x}:\mathtt{S}\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ かつ $\Gamma\vdash\mathtt{s}:\mathtt{S}$ ならば $\Gamma\vdash[\mathtt{x}\mapsto\mathtt{s}]\mathtt{t}:\mathtt{T}$ が成り立つ。

証明. 付録に掲載する。 □

付録の証明に関する補足を 2 つ述べる。

補足 1 参考書 (Types and Programming Languages) でも Substitution 補題は型判定の導出に関する帰納法で証明してある (p.106-107) が、T-ABS の場合において、型環境が変数から型への関数であり、順番を入れ替えたものが同じ関数であることを前提としている。permutation 補題で導出木の深さが同じであることを言っていることを考えると、上記の証明の方がこの本の説明の流れに沿っていると考える。

補足 2 補題 5 は term $\mathtt{t}$ の構造に関する帰納法で証明することもできる。その場合、さらにいくつかの補題を使うことになる。

上記の substitution 補題を用いることにより、preservation を示すことができる。

定理 3 (Preservation). $\Gamma\vdash\mathtt{t}:\mathtt{T}$ かつ $\mathtt{t}\to\mathtt{t}'$ ならば $\Gamma\vdash\mathtt{t}':\mathtt{T}$ が成り立つ。

証明. 省略する。 □

A Substitution補題の証明

ここではSubstitution 補題を証明する。(これまでの証明より若干込み入っているかもしれませんが、読める人は読んでみてください。余裕がなければ飛ばしてもらって構いません。)

補題 6 (Substitution)**.** $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ かつ $\Gamma \vdash \mathtt{s} : \mathtt{S}$ ならば $\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t} : \mathtt{T}$ が成り立つ。

証明. この補題を型判定 $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ の導出木に関する以下の性質 P として捉える。

$$P(\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}\text{の導出木}) \quad : \quad \forall \mathtt{s}.\ \Gamma \vdash \mathtt{s} : \mathtt{S} \Rightarrow \Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t} : \mathtt{T}$$

この性質 P を型判定 $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ の導出木の深さに関する帰納法で証明する。型判定 $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ の導出木において最後に使われた規則で場合分けをする。何らかのterm $\mathtt{s}$ が存在し、$\Gamma \vdash \mathtt{s} : \mathtt{S}$ が成り立つと仮定しておく(示したい性質 P の前提条件なので)。

T-VARの場合: 導出木は

$$\frac{\mathtt{z} : \mathtt{T} \in \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S}}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{z} : \mathtt{T}} \ \text{(T-VAR)}$$

という形をしている。変数 $\mathtt{z}$ が $\mathtt{x}$ と同じかどうかで場合分けをする。

- $\mathtt{z} = \mathtt{x}$ の場合、導出木は

  $$\frac{\mathtt{x} : \mathtt{T} \in \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S}}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{x} : \mathtt{T}} \ \text{(T-VAR)}$$

  という形をしている。$\mathtt{x} : \mathtt{T} \in \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S}$ より、$\mathtt{T} = \mathtt{S}$ である。ところで、$\mathtt{z} = \mathtt{x}$ であることから $[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{z} = \mathtt{s}$ なので、成り立って欲しいのは $\Gamma \vdash \mathtt{s} : \mathtt{T}$ であるが、$\mathtt{T} = \mathtt{S}$ より、$\Gamma \vdash \mathtt{s} : \mathtt{S}$ が成り立てばよい。これはさきほど仮定したことである。

- $\mathtt{z} \neq \mathtt{x}$ の場合、$[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{z} = \mathtt{z}$ である。よって成り立って欲しいのは $\Gamma \vdash \mathtt{z} : \mathtt{T}$ であるが、$\mathtt{z} : \mathtt{T} \in \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S}$ で、$\mathtt{z} \neq \mathtt{x}$ なので $\mathtt{z} : \mathtt{T} \in \Gamma$ であり、これにT-VAR規則を適用することにより $\Gamma \vdash \mathtt{z} : \mathtt{T}$ を得る。

T-ABSの場合: 導出木の一番下の部分は

$$\frac{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S}, \mathtt{y} : \mathtt{T_2} \vdash \mathtt{t_1} \ : \ \mathtt{T_1}}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \lambda \mathtt{y} : \mathtt{T_2}.\ \mathtt{t_1} \ : \ \mathtt{T_2} \to \mathtt{T_1}} \ \text{(T-ABS)}$$

という形をしている。まず、この講義では型環境において同じ変数は2つ以上は現れないという仮定をしているので、$\mathtt{x} \neq \mathtt{y}$ かつ $\mathtt{y} \notin \mathit{dom}(\Gamma)$ である。(これが成り立つように束縛変数の名前の付け替えをする。) また、もし $\mathtt{y}$ が $\mathtt{s}$ の自由変数に含まれていたら $\mathtt{y} \in \mathit{dom}(\Gamma)$ が成り立つ(ことが証明できる)ので、$\mathtt{y} \notin \mathit{FV}(\mathtt{s})$ である。

$\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S}, \mathtt{y} : \mathtt{T_2} \vdash \mathtt{t_1} : \mathtt{T_1}$ にPermutation補題(補題3)を適用すると $\Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{T_2}, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t_1} : \mathtt{T_1}$ が得られ、これらの導出木の深さは同じである。$\Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{T_2}, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t_1} : \mathtt{T_1}$ の導出木に対する帰納法の仮定は、$\forall \mathtt{s}.\ \Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{T_2} \vdash \mathtt{s} : \mathtt{S} \Rightarrow \Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{T_2} \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t_1} : \mathtt{T_1}$ である。

型判定 $\Gamma \vdash \mathtt{s} : \mathtt{S}$ について、$\mathtt{y} \notin \mathit{dom}(\Gamma)$ であるので、Weakning補題(補題4)を適用すると $\Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{T_2} \vdash \mathtt{s} : \mathtt{S}$ が得られる。よって、上記の帰納法の仮定より、$\Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{T_2} \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t_1} : \mathtt{T_1}$ が得られる。これにT-ABS規則を適用すると $\Gamma \vdash \lambda \mathtt{y} : \mathtt{T_2}.[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t_1} : \mathtt{T_2} \to \mathtt{T_1}$ が得られる。$\mathtt{x} \neq \mathtt{y}$ と置換の定義より、

$$[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}](\lambda \mathtt{y} : \mathtt{T_2}.\mathtt{t_1}) = \lambda \mathtt{y} : \mathtt{T_2}.[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t_1}$$

であるので、

$$\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}](\lambda \mathtt{y} : \mathtt{T}_2 . \mathtt{t}_1) : \mathtt{T}_2 \to \mathtt{T}_1$$

が成立し、性質 P が成立する。

T-APP の場合: 導出木の一番下の部分は

$$\frac{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{T}_2 \to \mathtt{T} \quad \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{T}_2}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_1\ \mathtt{t}_2 : \mathtt{T}} \text{(T-APP)}$$

という形をしている。$\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{T}_2 \to \mathtt{T}$ と $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{T}_2$ の導出木に帰納法の仮定を適用すると、$\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_1 : \mathtt{T}_2 \to \mathtt{T}$ と $\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_2 : \mathtt{T}_2$ が成り立つ。これらに T-APP 規則を適用すると

$$\Gamma \vdash ([\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_1)\ ([\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_2) : \mathtt{T}$$

が得られる。置換の定義より

$$[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}](\mathtt{t}_1\ \mathtt{t}_2) = ([\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_1)\ ([\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_2)$$

であるので、

$$\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}](\mathtt{t}_1\ \mathtt{t}_2) : \mathtt{T}$$

が成り立つ。

T-TRUE の場合: 導出木は

$$\frac{}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{true} : \mathtt{Bool}} \text{(T-TRUE)}$$

という形をしている。置換の定義より

$$[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{true} = \mathtt{true}$$

である。T-TRUE 規則より、

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathtt{true} : \mathtt{Bool}} \text{(T-TRUE)}$$

が成り立つので、

$$\frac{}{\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{true} : \mathtt{Bool}} \text{(T-TRUE)}$$

が成り立つ。

T-FALSE の場合: T-TRUE の場合と同様。

T-IF の場合: 導出木の一番下の部分は

$$\frac{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{Bool} \quad \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{T} \quad \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_3 : \mathtt{T}}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3 : \mathtt{T}} \text{(T-IF)}$$

という形をしている。$\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{Bool}$, $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{T}$, $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{t}_3 : \mathtt{T}$ の導出木に帰納法の仮定を適用すると、$\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_1 : \mathtt{Bool}$, $\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_2 : \mathtt{T}$, $\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_3 : \mathtt{T}$ が得られる。これらに T-IF 規則を適用すると

$$\Gamma \vdash \mathtt{if}\ [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_3 : \mathtt{T}$$

が得られる。置換の定義から、

$$[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}](\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3) = \mathtt{if}\ [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}]\mathtt{t}_3$$

なので、

$$\Gamma \vdash [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{s}](\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3) : \mathtt{T}$$

が得られる。 □

この補題の証明では以下の帰納法を用いている。

命題 1. 型環境に要素（変数と型の対応）が少なくとも 1 つある型判定の導出木全ての集合を $\mathcal{T}$ とすると、

$$\begin{array}{l} \forall s \in \mathcal{T}.\ \{\forall r \in \mathcal{T}.\ (r \text{ の深さ}) < (s \text{ の深さ}) \Rightarrow P(r)\} \Rightarrow P(s) \\ \Longleftrightarrow \\ \forall t \in \mathcal{T}.\ P(t) \end{array}$$

□

型判定間の二項関係 $\prec$ を

$$r \prec s \Longleftrightarrow (r \text{ の深さ}) < (s \text{ の深さ})$$

と定義すると、$\prec$ は集合 $\mathcal{T}$ 上の整礎な二項関係であり、上記の命題は整礎帰納法の例である。