Fourier 級数の計算について

情報工学科　篠埜 功

この資料では Fourier 級数展開（教科書例 2.6）の計算手順の詳細を示す。

まず、区間 $[-\pi, \pi]$ 上で関数 $f(x)$ を $\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx \;\; (k = 1, \ldots, n)$ の線形結合で近似する。

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

近さの尺度は、授業で説明した通り、

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) - f(x)\}^2 \mathrm{d}x$$

とする。

J を最小にするような線形結合を求めるためには、$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0,\ \frac{\partial J}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$, $\frac{\partial J}{\partial b_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$ を解けばよいが、教科書例 2.4 により、偏微分をしなくても線形結合の係数を求めることができる。

仮に

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

が成り立つとする。まず両辺を積分する。

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\Big\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0 \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\Big\{a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \mathrm{d}x\Big\} \\
&= a_0 \pi
\end{aligned}$$

よって

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

が得られる。

次に、両辺に $\cos kx$ をかけて積分する。

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\Big\{\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\Big\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\Big\{\frac{1}{2}a_0+\sum_{l=1}^{n}(a_l\cos lx+b_l\sin lx)\Big\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\frac{1}{2}a_0\cos kx+\sum_{l=1}^{n}(a_l\cos lx\cos kx+b_l\sin lx\cos kx)\Big\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0\cos kx\mathrm{d}x+\sum_{l=1}^{n}\Big\{a_l\int_{-\pi}^{\pi}\cos lx\cos kx\mathrm{d}x+b_l\int_{-\pi}^{\pi}\sin lx\cos kx\mathrm{d}x\Big\} \\
&= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x \\
&= a_k\pi
\end{aligned}
$$

よって

$$
a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x
$$

が得られる。

次に、両辺に $\sin kx$ をかけて積分する。

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\Big\{\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\Big\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\Big\{\frac{1}{2}a_0+\sum_{l=1}^{n}(a_l\cos lx+b_l\sin lx)\Big\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\frac{1}{2}a_0\sin kx+\sum_{l=1}^{n}(a_l\cos lx\sin kx+b_l\sin lx\sin kx)\Big\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0\sin kx\mathrm{d}x+\sum_{l=1}^{n}\Big\{a_l\int_{-\pi}^{\pi}\cos lx\sin kx\mathrm{d}x+b_l\int_{-\pi}^{\pi}\sin lx\sin kx\mathrm{d}x\Big\} \\
&= b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x \\
&= b_k\pi
\end{aligned}
$$

よって

$$
b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x
$$

が得られる。

以上で、関数 $f(x)$ に最も近い線形結合の係数が求まった。$f(x)$ のフーリエ級数は得られた線形結合の n を大きくしたときの極限であり、

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big\{\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\Big\} &= \frac{1}{2}a_0+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \\
&= \frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)
\end{aligned}
$$

である。実際には、上記の計算は暗算でできるので、黒板で書いたように省略してよい。