例題13-2

情報工学科　篠埜 功

例題

(1) 区間 $[-L, L]$ における関数 $f(x) = x$ のフーリエ級数を以下の形で求めよ。

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x\}$$

ここで ω_k は $\omega_k = \dfrac{k\pi}{L}$ と定義される。

(2) 区間 $[-L, L]$ における関数 $f(x) = x$ のフーリエ級数を以下の形で求めよ。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x}$$

ここで ω_k は $\omega_k = \dfrac{k\pi}{L}$ と定義される。

解答例

(1) 仮に

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x\}$$

とおく。（この等式を満たす $a_0, \ldots, a_n$ は存在しないが、仮に上記の等式が成り立つとする。）

まず、両辺を区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}a_0 \mathrm{d}x \\ &= La_0\end{aligned}$$

従って a_0 は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

次に両辺に $\cos\omega_k x$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x)\cos\omega_k x \mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} a_k \cos^2\omega_k x \mathrm{d}x \\
&= La_k
\end{aligned}
$$

従って a_k は以下のように得られる。

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\omega_k x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\cos\omega_k x \mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

最後に両辺に $\sin\omega_k x$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x)\sin\omega_k x \mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} b_k \sin^2\omega_k x \mathrm{d}x \\
&= Lb_k
\end{aligned}
$$

従って b_k は以下のように得られる。

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\omega_k x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\sin\omega_k x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{L}\left\{\left[x\frac{-\cos\omega_k x}{\omega_k}\right]_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L}\frac{-\cos\omega_k x}{\omega_k}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{L}\left\{L\cdot\frac{-\cos k\pi}{\omega_k} - (-L)\cdot\frac{-\cos(-k\pi)}{\omega_k}\right\} \\
&= \frac{1}{L}\left\{L\cdot\frac{-\cos k\pi}{\omega_k} + L\cdot\frac{-\cos k\pi}{\omega_k}\right\} \\
&= -\frac{2\cos k\pi}{\omega_k} \\
&= -\frac{2}{\omega_k}(-1)^k
\end{aligned}
$$

以上より、$f(x)$ に最も近い線形結合は

$$
\sum_{k=1}^{n}\{-\frac{2}{\omega_k}(-1)^k\sin\omega_k x\}
$$

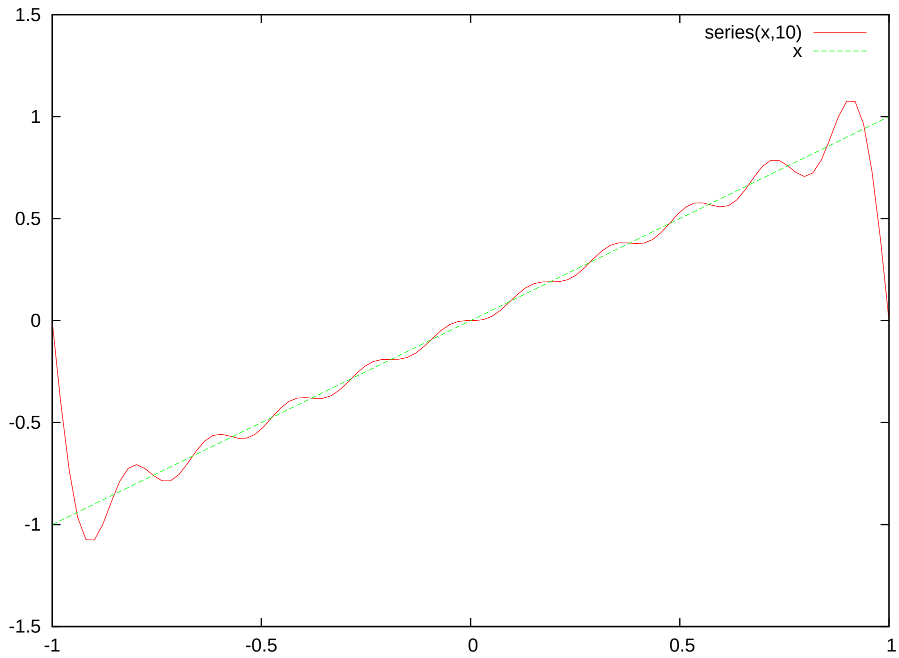

図 1: 関数 $f(x) = x$ と $\cos \omega_{10} x$ の項までの部分和の比較

である。関数 $f(x)$ のフーリエ級数は上記で得られた線形結合において n を大きくしたときの極限であり、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{-\frac{2}{\omega_k}(-1)^k \sin \omega_k x\}$$

である。

この級数の $\cos \omega_{10} x$ までの項の部分和を $L = 1.0$ の場合について図 1 に示す。

(2) 仮に

$$f(x) = \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{i\omega_l x}$$

とおく。（この等式を満たす $c_{-n}, \ldots, c_0, \ldots, c_n$ は存在しないが、仮に上記の等式

が成り立つとする。）この等式の両辺に $e^{-i\omega_k x}$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\omega_k x}\mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} e^{-i\omega_k x}\sum_{l=-n}^{n} c_l e^{i\omega_l x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-L}^{L} \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{i\omega_l x}e^{-i\omega_k x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-L}^{L} \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{i(\omega_l-\omega_k)x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-L}^{L} \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{i\omega_{l-k} x}\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad (\omega_l - \omega_k = \frac{l\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{(l-k)\pi}{L}\text{なので}) \\
&= \sum_{l=-n}^{n} \int_{-L}^{L} c_l e^{i\omega_{l-k} x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-L}^{L} c_k e^{0}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-L}^{L} c_k \mathrm{d}x \\
&= 2Lc_k
\end{aligned}
$$

従って c_k は以下のように得られる。

$$
c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\omega_k x}\mathrm{d}x
$$

$k \neq 0$ のとき、c_k は以下のように計算される。

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\omega_k x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} xe^{-i\omega_k x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2L}\left\{\left[x\frac{e^{-i\omega_k x}}{-i\omega_k}\right]_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L}\frac{e^{-i\omega_k x}}{-i\omega_k}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{2L}\cdot\frac{Le^{-i\omega_k L} - (-L)e^{i\omega_k L}}{-i\omega_k} \qquad \left(\text{since } \int_{-L}^{L} e^{-i\omega_k x}\mathrm{d}x = 0\right) \\
&= \frac{1}{2L}\cdot\frac{Le^{-i\frac{k\pi}{L}L} - (-L)e^{i\frac{k\pi}{L}L}}{-i\omega_k} \\
&= \frac{1}{2L}\cdot\frac{Le^{-ik\pi} - (-L)e^{ik\pi}}{-i\omega_k} \\
&= \frac{1}{2L}\cdot\frac{L(-1)^k + L(-1)^k}{-i\omega_k} \\
&= \frac{1}{2L}\cdot\frac{2L(-1)^k}{-i\omega_k} \\
&= \frac{(-1)^k}{-i\omega_k} \\
&= \frac{1}{\omega_k}(-1)^k i
\end{aligned}
$$

$k = 0$ のとき、c_0 は以下のように計算される。

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} x\mathrm{d}x = 0$$

従って関数 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\omega_k x}$$

である。ここで c_k は以下のように定義される。

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_k}(-1)^k i & k \neq 0 \\ 0 & k = 0. \end{cases}$$

関数 $f(x)$ のフーリエ級数は上記で得られた線形結合において n を大きくしたときの極限であり、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\omega_k x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x}$$

である。

補足　得られた無限級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x}$$

の中の $e^{i\omega_k x}$ をオイラーの公式で $\cos\omega_k x + i\sin\omega_k x$ に置き換えて整理すると、虚数の項は消えて、(1) の結果の

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{-\frac{2}{\omega_k}(-1)^k \sin\omega_k x\}$$

になる（各自確認してください）。

補足　(2) の解答例では等式の両辺に $e^{-i\omega_k x}$ を掛けたが、$e^{i\omega_k x}$ を掛けても良い。同じ結果が得られる。ただし、$e^{i\omega_k x}$ を掛けた場合、

$$c_{-k} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{i\omega_k x}\mathrm{d}x$$

が得られ、ここから

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{i\omega_{-k} x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{i(-\omega_k) x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\omega_k x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

のように符号を変えると同じ式が得られる。$e^{-i\omega_k x}$ を両辺に掛けることにより、最後の符号の変換をしなくていいようにしている。このあとは $f(x) = x$ として解答例 2 と同じ計算をすればよい。