# 応用数学 練習問題2 解答例

情報工学科　篠埜 功

この資料では、今日の練習問題の解答をグラフとともに示す。正規方程式 (normal equation) の形にしてから値を入れて計算する場合 (解答 1) と最初から値を入れて計算する場合 (解答 2) の両方の解答を示す。解答 1 の方が見通しが良い。

**問**　以下の 4 点に最も近い 2 次関数を求め、4 点とともに図示せよ。近さの尺度としては講義で説明した、y 座標の差の 2 乗の和 (の半分) を用いよ。

$$(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,1)$$

**解答 1**　求める関数を $f(x)=ax^2+bx+c$、与えられた 4 点を $(x_1,y_1)=(-1,0),(x_2,y_2)=(0,-1),(x_3,y_3)=(1,0),(x_4,y_4)=(2,1)$ とおく。関数 $f(x)$ と 4 点の $y$ 座標の差の 2 乗和の半分

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(f(x_i)-y_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$$

を最小にするような $a,b,c$ を求めればよい。$J$ を最小にするには、$J$ の $a,b,c$ での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial c}=0$$

を解けばよい。まず、$a$ での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\frac{\partial}{\partial a}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2\\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^4 + bx_i^3 + cx_i^2 - x_i^2 y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{4} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i
\end{aligned}
$$

である。次に、$b$ での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\frac{\partial}{\partial b}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i - x_i y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} x_i y_i
\end{aligned}
$$

である。次に、$c$ での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial c}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\frac{\partial}{\partial c}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)1 \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{4} x_i + c\sum_{i=1}^{4} 1 - \sum_{i=1}^{4} y_i
\end{aligned}
$$

である。これらを $0$ とおくと、$a, b, c$ に関する連立一次方程式となる。係数を計算すると、

$$
\sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 18, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = 8, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 6, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i = 2
$$

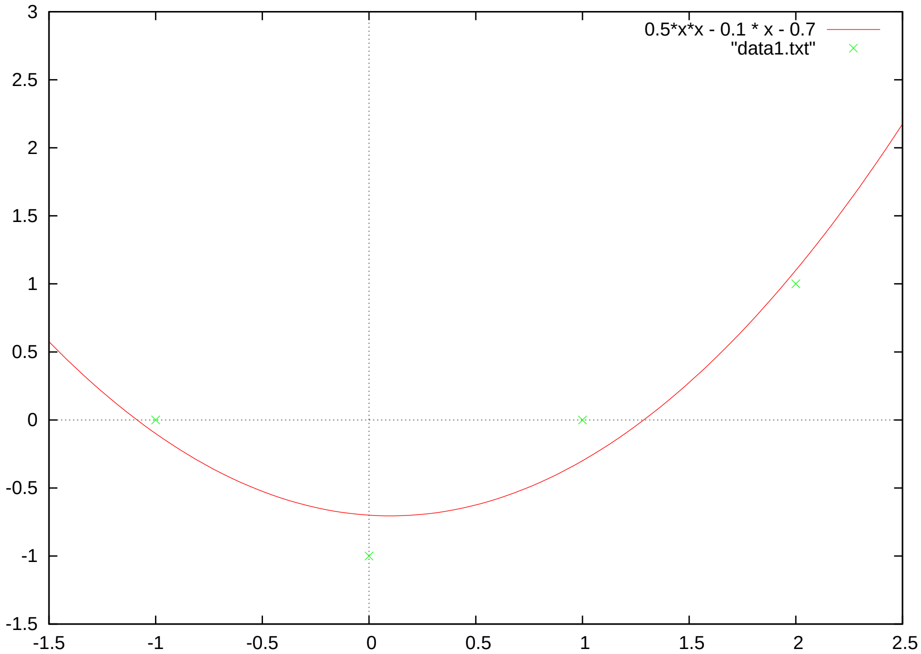


図 1: 与えられた 4 点に最も近い 2 次関数

$$\sum_{i=1}^{4} 1 = 4, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i = 4, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 2, \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 0$$

である。よって、連立一次方程式は

$$\begin{aligned} 18a + 8b + 6c - 4 &= 0 \quad \cdots (1) \\ 8a + 6b + 2c - 2 &= 0 \quad \cdots (2) \\ 6a + 2b + 4c &= 0 \quad \cdots (3) \end{aligned}$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{10}, \quad c = -\frac{7}{10}$$

を得る。以上より、求める関数は

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$$

である。これを 4 点とともに図示すると、図 1 のようになる。図 1 において、緑色の $\times$ 記号が与えられた点であり、赤色の曲線が求めた 2 次関数である。

**解答 2**　求める関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。関数 $f(x)$ と 4 点との $y$ 座標の差の 2 乗和の半分を $J$ とおく。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\Big\{\{f(-1) - 0\}^2 + \{f(0) - (-1)\}^2 + \{f(1) - 0\}^2 + \{f(2) - 1\}^2\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{(a - b + c)^2 + (c + 1)^2 + (a + b + c)^2 + (4a + 2b + c - 1)^2\Big\} \end{aligned}$$

この $J$ が最小になる $a, b, c$ を求めればよい。$J$ を最小にするは、$J$ の $a, b, c$ での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

を解けばよい。まず、$a$ での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{1}{2}\left\{(a-b+c)^2+(c+1)^2+(a+b+c)^2+(4a+2b+c-1)^2\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial a}(a-b+c)^2+\frac{\partial}{\partial a}(c+1)^2+\frac{\partial}{\partial a}(a+b+c)^2+\frac{\partial}{\partial a}(4a+2b+c-1)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2(a-b+c)+2(a+b+c)+2(4a+2b+c-1)\cdot 4\right\} \\
&= (a-b+c)+(a+b+c)+(4a+2b+c-1)\cdot 4 \\
&= (a-b+c)+(a+b+c)+(16a+8b+4c-4) \\
&= 18a+8b+6c-4
\end{aligned}$$

である。
(注意) $(c+1)^2$ は $a$ については定数であり、

$$\frac{\partial}{\partial a}(c+1)^2 = 0$$

である。
　次に、$b$ での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\left\{\frac{1}{2}\left\{(a-b+c)^2+(c+1)^2+(a+b+c)^2+(4a+2b+c-1)^2\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial b}(a-b+c)^2+\frac{\partial}{\partial b}(c+1)^2+\frac{\partial}{\partial b}(a+b+c)^2+\frac{\partial}{\partial b}(4a+2b+c-1)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2(a-b+c)\cdot(-1)+2(a+b+c)+2(4a+2b+c-1)\cdot 2\right\} \\
&= (a-b+c)\cdot(-1)+(a+b+c)+(4a+2b+c-1)\cdot 2 \\
&= (-a+b-c)+(a+b+c)+(8a+4b+2c-2) \\
&= 8a+6b+2c-2
\end{aligned}$$

である。
(注意) $(c+1)^2$ は $b$ については定数であり、

$$\frac{\partial}{\partial b}(c+1)^2 = 0$$

である。

次に、$c$での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c}\left\{\frac{1}{2}\left\{(a-b+c)^2+(c+1)^2+(a+b+c)^2+(4a+2b+c-1)^2\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial c}(a-b+c)^2+\frac{\partial}{\partial c}(c+1)^2+\frac{\partial}{\partial c}(a+b+c)^2+\frac{\partial}{\partial c}(4a+2b+c-1)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2(a-b+c)+2(c+1)+2(a+b+c)+2(4a+2b+c-1)\right\} \\
&= (a-b+c)+(c+1)+(a+b+c)+(4a+2b+c-1) \\
&= 6a+2b+4c
\end{aligned}$$

である。

これらを$0$とおくと、

$$\begin{aligned}
18a+8b+6c-4 &= 0 \quad \cdots(1) \\
8a+6b+2c-2 &= 0 \quad \cdots(2) \\
6a+2b+4c &= 0 \quad \cdots(3)
\end{aligned}$$

となる。これは$3$変数の連立一次方程式であり、これを解けばよい。

以下で、この連立一次方程式を解く手順を示す。通常はガウスの消去法などを用いるが、ここでは中学生が解くような方法で示す。以下の解き方は一例である。

まず、(1), (2), (3) を 2 で割る。

$$\begin{aligned}
9a+4b+3c-2 &= 0 \quad \cdots(4) \\
4a+3b+c-1 &= 0 \quad \cdots(5) \\
3a+b+2c &= 0 \quad \cdots(6)
\end{aligned}$$

まず、(5), (6) から$c$を消去する。(5) の 2 倍から (6) を引くと、

$$5a+5b-2=0 \quad \cdots(7)$$

となる。次に、(4), (5) から$c$を消去する。(5) の 3 倍から (4) を引くと、

$$3a+5b-1=0 \quad \cdots(8)$$

となる。(7), (8) は$a, b$に関する 2 変数の連立一次方程式である。(7) から (8) を引くと、

$$2a-1=0$$

となる。これを解くと、

$$a=\frac{1}{2}$$

となる。これを (8) に代入すると

$$\frac{3}{2}+5b-1=0$$

となり、

$$b = -\frac{1}{10}$$

となる。これらを (5) に代入すると

$$4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot (-\frac{1}{10}) + c - 1 = 0$$

となり、これを解くと

$$c = -\frac{7}{10}$$

となる。以上より、求める関数は

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$$

である。これを 4 点とともに図示すると、図 1 のようになる。