練習問題11

情報工学科　篠埜 功

練習問題　区間 $[-\pi,\pi]$ 上の $f(x)=x^2$ のフーリエ級数に対するパーセバルの等式を使って以下の級数の値を手順 (1)-(5) に従って求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

(1) 以下の直交関数系の線形結合のうち、関数 $f(x)$ に最も近いものを求めよ。近さの尺度としては、講義で説明した、y 座標の差の 2 乗を区間 $[-\pi,\pi]$ において積分したもの (の半分) を用いよ。

$$\{\frac{1}{2},\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots,\cos nx,\sin nx\}$$

(2) 関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi,\pi]$ におけるフーリエ級数を示せ。（上記 (1) で求めた線形結合の n を大きくしたときの極限が関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi,\pi]$ におけるフーリエ級数である。）

(3) (2) で得られた級数を正規化せよ。

(4) (3) で得られた級数に対するパーセバルの等式を書け。

(5) 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ の値を求めよ。

補足　内積空間 $\mathcal{L}$ および $\mathcal{L}$ 内のベクトル $\boldsymbol{u}$ について、$\mathcal{L}$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_i | i\geq 1\}$ の線形結合

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\boldsymbol{e}_k$$

のうち、$\boldsymbol{u}$ との差のノルムの 2 乗 J が最も小さいベクトルが n が大きくなるに従って $\boldsymbol{u}$ に収束するとき（$\lim_{n\to\infty}J=0$ のとき）、以下の等式（パーセバルの等式）が成り立つ。

$$\|\boldsymbol{u}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$$

解答例

(1) 仮に、以下の等式が成り立つと仮定する。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

（この等式を満たす $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ は存在しないが、仮にこの等式が成り立つ場合を考える。）等式 (1) の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\mathrm{d}x \\ &= a_0\pi\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\pi^2\end{aligned}$$

となる。

等式 (1) の両辺に $\cos kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x &= a_k\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\mathrm{d}x \\ &= a_k\pi\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin kx}{k}\mathrm{d}x\right\} \\ &= -\frac{2}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x \qquad (\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \text{ は } 0 \text{ なので})\end{aligned}$$

である。ここで、$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x$ を別に計算すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x &= \left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{k}\left[x\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} \qquad (\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}\mathrm{d}x \text{ は } 0 \text{ なので})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{k}(\pi\cos\pi k - (-\pi)\cos(-\pi k)) \\
&= -\frac{1}{k}(\pi\cos\pi k + \pi\cos\pi k) \\
&= -\frac{2\pi}{k}\cos\pi k \\
&= -\frac{2\pi}{k}(-1)^k
\end{aligned}
$$

である。よって、a_k の計算の続きをすると、

$$
\begin{aligned}
a_k &= -\frac{2}{\pi k}(-\frac{2\pi}{k}(-1)^k) \\
&= \frac{4}{k^2}(-1)^k
\end{aligned}
$$

となる。

　等式 (1) の両辺に $\sin kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \mathrm{d}x &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \mathrm{d}x \\
&= b_k \pi
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx \mathrm{d}x \\
&= 0 \quad (x^2 \sin kx \text{ は奇関数なので})
\end{aligned}
$$

となる。

　以上をまとめると、$f(x)$ に最も近い線形結合は

$$
\frac{2}{3}\pi^2 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx.
$$

である。

(2) $f(x) = x^2$ のフーリエ級数展開は、(1) で得られた線形結合の n を大きくしたときの極限であり、

$$
\frac{2}{3}\pi^2 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx.
$$

である。

(3) $\frac{1}{2}$ と $\cos kx$ のノルムを計算すると

$$
\begin{aligned}
\|\frac{1}{2}\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\left[\frac{1}{4}x\right]_{-\pi}^{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
\|\cos kx\| &= \sqrt{(\cos kx,\cos kx)} \\
&= \sqrt{\int_{\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

となり、(2) で求めた $f(x)=x^2$ のフーリエ級数は以下のように正規化される。

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\pi^2\cdot\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx \\
&\quad=\frac{2}{3}\pi^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\sqrt{\pi}\cdot\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

(4) パーセバルの等式より、以下の等式を得る。

$$
\|f\|^2=\left(\frac{2}{3}\pi^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2}(-1)^k\sqrt{\pi}\right)^2 \tag{2}
$$

等式 (2) の左辺を計算すると

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2 &= (f,f) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \left(\frac{\pi^5}{5}-(-\frac{\pi^5}{5})\right) \\
&= \frac{2}{5}\pi^5
\end{aligned}
$$

となる。等式 (2) の右辺を計算すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \left(\frac{2}{3}\pi^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2}(-1)^k\sqrt{\pi}\right)^2 \\
&= \frac{4}{9}\pi^4 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^4}\pi \\
&= \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}
\end{aligned}
$$

となる。従って、$f(x) = x^2$ のフーリエ級数に対するパーセバルの等式は以下のようになる。

$$\frac{2}{5}\pi^5 = \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

(5) 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ の値は以下のように求められる。

$$
\begin{aligned}
16\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} &= \frac{2}{5}\pi^5 - \frac{2}{9}\pi^5 \\
&= \frac{18}{45}\pi^5 - \frac{10}{45}\pi^5 \\
&= \frac{8}{45}\pi^5
\end{aligned}
$$

であるので、級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ の値は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} &= \frac{1}{16\pi}\cdot\frac{8}{45}\pi^5 \\
&= \frac{1}{90}\pi^4
\end{aligned}
$$

補足 得られた値 $\dfrac{1}{90}\pi^4$ はゼータ関数 $\zeta(n)$ の $n = 4$ の時の値である。ゼータ関数は以下の関数である。

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$$

つまり、$\zeta(4) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{1}{90}\pi^4$ である。