Chebyshev の多項式の漸化式について

情報工学科　篠埜 功

チェビシェフの多項式 $T_n(x)$ は、$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表したときに $\cos\theta$ を x と置いたものである（教科書 p. 45 (2.47)、これは講義の範囲外）。よって以下の等式が成立している。

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

cos の加法定理より、

$$\begin{aligned} \cos(n+2)\theta &= \cos\{(n+1)\theta + \theta\} \\ &= \cos(n+1)\theta\cos\theta - \sin(n+1)\theta\sin\theta \end{aligned}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos\{(n+1)\theta - \theta\} \\ &= \cos(n+1)\theta\cos\theta + \sin(n+1)\theta\sin\theta \end{aligned}$$

が成り立つ。これらの 2 つの等式を加えると、

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta$$

を得る。$\cos n\theta$ を右辺に移項すると、

$$\cos(n+2)\theta = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta$$

となる。よって

$$T_{n+2}(\cos\theta) = 2T_1(\cos\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)$$

となり、$\cos\theta$ を x で置き換えて

$$T_{n+2}(x) = 2T_1(x)T_{n+1}(x) - T_n(x)$$

を得る。$T_1(x) = x$ であるので、漸化式

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

を得る。

例 $T_2(x)$ を $T_1(x) = x$ と $T_0(x) = 1$ から上記漸化式を使って求めてみる。

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

$T_2(x)$ を $\cos 2\theta$ から求めると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \end{aligned}$$

よって $T_2(x) = 2x^2 - 1$ となり、漸化式を使って求めた場合と一致する。