2変数2次関数について

情報工学科　篠埜 功

注意　この資料は講義の範囲外です。2変数2次関数の分類に興味がある人のみ読んでください。2行2列の行列の固有値、固有ベクトル、直交行列による対角化について知っていることが前提です。

練習問題1の近さの尺度の関数

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)^2$$

は、以下のような a, b に関する2変数2次関数だった（第1回練習問題解答2参照）。

$$J = \frac{1}{2}\{5a^2 + 3b^2 + 6ab + 8a + 2b + 5\}$$

授業中に触れたように、2変数2次関数は楕円型、放物型、双曲型の3種類に分類される（教科書 pp. 191-192 参照）。この資料では、上記関数 J が楕円型であることを示す。J から $\frac{1}{2}$ を除いた部分を $f(a, b)$ とおく。

$$f(a, b) = 5a^2 + 3b^2 + 6ab + 8a + 2b + 5$$

この中の $5a^2 + 3b^2 + 6ab$ の部分（このような式を2次形式という）は、

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

のように行列を使った形で表すことができる（教科書 p.166 式 (5.76) 参照）。また、$8a + 2b$ は、

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

のように行ベクトル、列ベクトルを使って表すことができる。従って、$f(a, b)$ は以下のように表すことができる。

$$f(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 5$$

上記の式中の行列 $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ を A とおく。行列 A は対称行列になるように選んである。a, b の2次の項（a^2, b^2, ab の項）は必ず対称行列を使って上記のように表すことができる。上記の式を A を使って書くと

$$f(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 5$$

となる。
　次に行列 A を直交行列で対角化する。そのために

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす x, y, λ を求める。ただし、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外のものを求める。この式は単位行列を I と書くと

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書き表される。

$$|\lambda I - A| = 0$$

より

$$(\lambda - 5)(\lambda - 3) - 9 = 0$$

となり、これを解くと

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{10}$$

となる。$\lambda = 4 + \sqrt{10}$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

が一つの解として得られ、これを正規化する（長さを 1 にする）と

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{20 - 2\sqrt{10}}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

が得られる。$\lambda = 4 - \sqrt{10}$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 - \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

が一つの解として得られ、これを正規化すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{20 + 2\sqrt{10}}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 - \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

が得られる。上記 2 つの単位ベクトルから以下のように行列を作る。

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} & \frac{3}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \\ \frac{-1+\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} & \frac{-1-\sqrt{10}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \end{pmatrix}$$

この行列 U は直交行列になっている。この行列 U を用いると

$$A = U \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 4 - \sqrt{10} \end{pmatrix} U^{\mathrm{T}}$$

が成立する（U の転置行列を U^{T} と書いている）。$\lambda_1 = 4+\sqrt{10}, \lambda_2 = 4-\sqrt{10}$ とおくと、

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^{\mathrm{T}}$$

と表される。また、

$$U^{\mathrm{T}} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

も成立する。

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = U^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと、U が直交行列であることにより

$$U \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

が成立する。以上より $5a^2+3b^2+6ab$ の部分は

$$\begin{aligned}
5a^2+3b^2+6ab &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \quad \text{（内積で表記）} \\
&= \left(U \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},\ AU \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},\ U^{\mathrm{T}} AU \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) \quad \text{（教科書 (5.87) 式より）} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \lambda_1 a' \\ \lambda_2 b' \end{pmatrix} \right) \\
&= \lambda_1 a'^2 + \lambda_2 b'^2
\end{aligned}$$

と変形できる。（$\lambda_1 a'^2 + \lambda_2 b'^2$ を 2 次形式 $5a^2+3b^2+6ab$ の標準形という。）

　$8a+2b$ の部分は、

$$\begin{aligned}
8a+2b &= \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} & \frac{3}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \\ \frac{-1+\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} & \frac{-1-\sqrt{10}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}}a' + \frac{3}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}}b' \\ \frac{-1+\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}}a' + \frac{-1-\sqrt{10}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}}b' \end{pmatrix} \\
&= \frac{24}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}}a' + \frac{24}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}}b' + \frac{-2+2\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}}a' + \frac{-2-2\sqrt{10}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}}b' \\
&= \frac{22+2\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}}a' + \frac{22-2\sqrt{10}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}}b'
\end{aligned}
$$

以上より、

$$
f(a,b) = \lambda_1 a'^2 + \lambda_2 b'^2 + \frac{22+2\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}}a' + \frac{22-2\sqrt{10}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}}b' + 5
$$

となる。a' と b' それぞれについて平方完成すると

$$
f(a,b) = \lambda_1 \left(a' + \frac{11+\sqrt{10}}{\lambda_1\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \right)^2 + \lambda_2 \left(b' + \frac{11-\sqrt{10}}{\lambda_2\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \right)^2 + \frac{1}{6}
$$

が得られる。$J = \dfrac{1}{2}f(a,b)$ より

$$
J = \frac{\lambda_1}{2} \left(a' + \frac{11+\sqrt{10}}{\lambda_1\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \right)^2 + \frac{\lambda_2}{2} \left(b' + \frac{11-\sqrt{10}}{\lambda_2\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \right)^2 + \frac{1}{12}
$$

となる。$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ より $\dfrac{\lambda_1}{2} > 0,\ \dfrac{\lambda_2}{2} > 0$ であり、J は楕円型である。よって

$$
\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11+\sqrt{10}}{\lambda_1\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \\ -\frac{11-\sqrt{10}}{\lambda_2\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \end{pmatrix}
$$

のとき、J は最小値 $\dfrac{1}{12}$ をとる。$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ より、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} & \frac{3}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \\ \frac{-1+\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} & \frac{-1-\sqrt{10}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{11+\sqrt{10}}{\lambda_1\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \\ -\frac{11-\sqrt{10}}{\lambda_2\sqrt{20+2\sqrt{10}}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。つまり $a = -\dfrac{3}{2},\ b = \dfrac{7}{6}$ のとき J は最小値 $\dfrac{1}{12}$ をとる。

補足 結局関数 J は、

$$
\frac{\lambda_1}{2}a^2 + \frac{\lambda_2}{2}b^2
$$

という楕円型の 2 変数 2 次関数を行列 U^{T} で 1 次変換（行列 U^{T} は直交行列なので回転）し、a 軸方向に $-\dfrac{3}{2}$、b 軸方向に $\dfrac{7}{6}$、J 軸方向に $\dfrac{1}{12}$ 並行移動して得られる関数である。