離散フーリエ変換について

情報工学科　篠埜 功

この文書の 1 節の内容は（少し変えている箇所はあるが）ほぼ [1] に基づいている。導入の仕方が教科書 [2] と若干異なるが、本質的には同じである。2 節の内容は教科書 [2] に基づいている。変数名の使い方はできるだけ教科書 [2] に合わせているが少し変えている部分もある。

1　離散フーリエ変換（Discrete Fourier Transform, DFT）

$f(x)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(x)$ は区間 $[0, 2\pi]$ における以下の N 点での値だけが与えられているとする。

$$x_l = \frac{2\pi l}{N} \qquad (l = 0, \ldots, N-1) \tag{1}$$

これらの N 点での値 $f(x_0), \ldots, f(x_{N-1})$ を $f(x)$ の**サンプル値**という。これらのサンプル値を $f_l = f(x_l) \quad (l = 0, \ldots, N-1)$ とおく。このとき、N 点

$$\{(x_l, f_l) \mid l = 0, 1, \ldots, N-1\}$$

を全部通る複素指数関数 $\{e^{ikx} | 0 \le k \le N-1\}$ の線形結合

$$\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ikx}$$

を求めたい[1]。つまり、

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ikx_l} \qquad (l = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{2}$$

を満たす係数 $F_1, \ldots, F_{N-1}$ を求めたい。

これは以下のようにして求めることができる。

[1] このような関数を求めることを**補完** (interpolation) という。詳しくは数値計算の授業で勉強してください。

等式 (2) の両辺に e^{-imx_k} をかけて、l について 0 から $N-1$ までの和をとる。

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-imx_l} &= \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ikx_l} e^{-imx_l} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i(k-m)x_l} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i(k-m)2\pi l/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} F_k e^{i(k-m)2\pi l/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sum_{l=0}^{N-1} e^{i(k-m)2\pi l/N}
\end{aligned}$$

$r = e^{i(k-m)2\pi/N}$ とすると、

$$e^{i(k-m)2\pi l/N} = (e^{i(k-m)2\pi/N})^l = r^l$$

となり、上記の和は

$$\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-imx_l} = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sum_{l=0}^{N-1} r^l$$

と書ける。

$k = m$ のときは、$r = e^0 = 1$ であり、和 $\sum_{l=0}^{N-1} r^l$ は以下のように計算される。

$$\sum_{l=0}^{N-1} r^l = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = N$$

$k \neq m$ のときは、$r \neq 1$ であり、和 $\sum_{l=0}^{N-1} r^l$ は以下のように計算される。

$$\sum_{l=0}^{N-1} r^l = \frac{1-r^N}{1-r} = 0$$

r^N は以下に示すように 1 である。

$$r^N = (e^{i(k-m)2\pi/N})^N = e^{i(k-m)2\pi} = 1$$

つまり以下の等式が成り立つ。

$$F_k \sum_{l=0}^{N-1} r^l = \begin{cases} F_m N & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{N-1} F_k \sum_{l=0}^{N-1} r^l = F_m N$$

となる。$\displaystyle\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-imx_l} = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sum_{l=0}^{N-1} r^l$ であるので、

$$\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-imx_l} = F_m N$$

となる。N で割ると

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-imx_l}$$

となり、m を k に名前をつけかえると

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-ikx_l} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i2\pi kl/N} \qquad k = 0, \ldots, N-1 \tag{3}$$

となる。$F_0, \ldots, F_{N-1}$ を入力信号 $f_0, \ldots, f_{N-1}$ の**離散フーリエ変換** (discrete Fourier transform) という。

$\omega = e^{2\pi i/N}$ とおくと、上記離散フーリエ変換は以下のように行列を使って書くことができる。

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ \omega^0 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

この行列の l 行 k 列の値は

$$e^{-ikx_l} = e^{-i2\pi kl/N} = \omega^{-lk}$$

である。

式 (2)

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ikx_l} = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kl/N} \qquad (l = 0, 1, \ldots, N-1)$$

は $F_0, \ldots, F_{N-1}$ から $f_0, \ldots, f_{N-1}$ への変換であり、**逆離散フーリエ変換** (inverse discrete Fourier transform) という。逆離散フーリエ変換は以下のように行列を

使って記述できる。

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix}$$

この行列の l 行 k 列の値は

$$e^{ikx_l} = e^{i2\pi kl/N} = \omega^{lk}$$

である。

入力信号列の離散フーリエ変換の逆離散フーリエ変換は元の入力信号と同じになる。離散フーリエ変換および逆離散フーリエ変換は上記のように行列の掛け算であるが、これら 2 つの行列は互いに逆行列の関係にある[2]。

$$\begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ \omega^0 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

この式は教科書 [2] の p. 130 の式 (4.46) である。（ただし教科書 [2] では ω を ω_N と書いている。）この等式の証明は教科書 [2] の p.130 例 4.11 にある。

例: $N = 4$ **の場合:**

以下の信号列の離散フーリエ変換を求めよ。

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

[2] A^{-1} は行列 A の逆行列を表す。

$N=4$ であるので、$\omega = e^{2\pi i/4} = e^{\pi i/2} = i$ であり、$\omega^{-lk} = i^{-lk}$ である。つまり $\boldsymbol{f}$ の離散フーリエ変換は以下のように計算される。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} \\ \omega^0 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} \\ \omega^0 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} \end{pmatrix} \boldsymbol{f} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ f_1 - if_2 - f_3 + if_4 \\ f_1 - f_2 + f_3 - f_4 \\ f_1 + if_2 - f_3 - if_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

補足　離散フーリエ変換、逆離散フーリエ変換において、定数 $1/N$ をどちらにかけるかは文献によって異なる。双方の定数をかけて $1/N$ になればよいので、両方に $1/\sqrt{N}$ をかける場合もある。

2　高速フーリエ変換（Fast Fourier Transform, FFT）

上記で見たように、離散フーリエ変換は単に行列の掛け算である。行列の掛け算を素朴に行うと演算回数が $O(N^2)$ 回となる。しかしながら、離散フーリエ変換は**高速フーリエ変換** (fast Fourier transform, FFT) という計算方法によって計算でき、演算回数は $O(N \log_2 N)$ となり、N が大きな数のとき、素朴な行列の掛け算を行う場合と比較し圧倒的に速く計算できる。FFT では上記行列の性質をうまく使うことにより演算回数を大幅に削減している。

離散フーリエ変換および逆離散フーリエ変換においては、数列 $a_0, \ldots, a_{N-1}$ から数列 $b_0, \ldots, b_{N-1}$ を以下のように求めるのが本質である。

$$
b_k = \sum_{l=0}^{N-1} a_l \omega^{kl} \qquad k = 0, \ldots, N-1 \tag{4}
$$

以下でこれを確認する。数列 $F_0, \ldots, F_{N-1}$ から数列 $f_0, \ldots, f_{N-1}$ を式 (3) に従って求めるためには、式 (4) において $a_k = F_k$ とおけば $f_l = b_l$ となる。

逆離散フーリエ変換については、式 (3) は以下のように書き換えることができる。

$$
\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \omega^{-kl} = \frac{1}{N} \overline{\sum_{l=0}^{N-1} \overline{f_l} \omega^{kl}}
$$

これは以下のように、右辺から左辺へ変形することによって示すことができる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \overline{\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\overline{f_l}\omega^{kl}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\overline{\overline{f_l}\omega^{kl}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\overline{\omega^{kl}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\overline{\omega}^{kl} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l(\omega^{-1})^{kl} \qquad (\overline{\omega} = \omega^{-1}\text{なので}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\omega^{-kl} \\
&= \mathrm{LHS}
\end{aligned}$$

式 (4) において $a_l = \overline{f_l}$ とおくと $F_k = \dfrac{1}{N}\overline{b_k}$ を得る。

以降では N が 2 の冪乗の場合を考える。

$$N = 2^n \qquad (n\text{ は自然数})$$

この場合において、離散フーリエ変換、逆離散フーリエ変換を効率よく求めるアルゴリズムを構築できる。

N が偶数のとき、以下の等式が成立する。

$$\omega^{N/2} = -1, \omega^{N/2+1} = -\omega, \omega^{N/2+2} = -\omega^2, \ldots, \omega^{N-1} = -\omega^{N/2-1}$$

これを示す。$\omega = e^{2\pi i/N}$ より、

$$\omega^{N/2} = (e^{2\pi i/N})^{N/2} = e^{i\pi} = -1$$

であり、従って

$$\omega^{N/2+k} = \omega^{N/2}\omega^k = -\omega^k$$

が得られる。

以降では $\omega = e^{2\pi i/N}$ において N をパラメータ化して

$$\omega_N = e^{2\pi i/N}$$

と記述する。すると N が偶数のとき以下の等式が成立する。

$$\omega_N^2 = \omega_{N/2}$$

これは以下のように示される。

$$\omega_N^2 = (e^{2\pi i/N})^2 = e^{4\pi i/N} = e^{2\pi i/(N/2)} = \omega_{N/2}$$

$f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} = \sum_{l=0}^{N-1} a_l x^l \tag{5}$$

と定義すると、式 (4) は以下のように書き換えることができる。

$$b_k = f(\omega_N^k) \qquad (k = 0, \ldots, N-1)$$

つまり、$b_0, \ldots, b_{N-1}$ を求めるには $f(1), \ldots, f(\omega_N^{N-1})$ を計算すればよい。この計算を $\mathrm{FFT}_N[f(x)]$ と書く。

$$\mathrm{FFT}_N[f(x)] = \{f(1), f(\omega_N), f(\omega_N^2), \ldots, f(\omega_N^{N-1})\}$$

ここで $f(1), f(\omega_N), f(\omega_N^2), \ldots, f(\omega_N^{N-1})$ は計算する値を表す。式 (5) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{N-2} x^{N-2} \\ &\quad + x(a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \cdots + a_{N-1} x^{N-2}) \\ &= p(x^2) + x q(x^2) \end{aligned}$$

ここで $p(x)$ と $q(x)$ は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{N-2} x^{N/2-1} \\ q(x) &= a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N/2-1} \end{aligned}$$

すると $\mathrm{FFT}_N[p(x^2)]$ は以下のようになる。

$$\mathrm{FFT}_N[p(x^2)] = \{p(1), p(\omega_N^2), p(\omega_N^4), \ldots, p(\omega_N^{2N-2})\}$$

この最初の半分は後半と同じであり、計算は最初の半分だけでよい。

$$\mathrm{FFT}_N[p(x^2)] = \{p(1), p(\omega_N^2), p(\omega_N^4), \ldots, p(\omega_N^{N-2})\}$$

$\omega_N^2 = \omega_{N/2}$ より

$$\mathrm{FFT}_N[p(x^2)] = \{p(1), p(\omega_{N/2}), p(\omega_{N/2}^2), \ldots, p(\omega_{N/2}^{N/2-1})\}$$

となり、

$$\mathrm{FFT}_N[p(x^2)] = \mathrm{FFT}_{N/2}[p(x)]$$

となる。同様に、

$$\mathrm{FFT}_N[q(x^2)] = \mathrm{FFT}_{N/2}[q(x)]$$

となる。

$\mathrm{FFT}_{N/2}[p(x)]$ と $\mathrm{FFT}_{N/2}[q(x)]$ の結果を用いることにより、$f(\omega_N^k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ は以下のように計算される。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} f(\omega_N^k) & = & p(\omega_{N/2}^k) + \omega_N^k q(\omega_{N/2}^k) & \qquad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \\ f(\omega_N^{N/2+k}) & = & p(\omega_{N/2}^k) - \omega_N^k q(\omega_{N/2}^k) & \qquad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \end{array} \right. \tag{6}$$

従って、$\mathrm{FFT}[f(x)]$ を計算するためには、まず2つの計算 $\mathrm{FFT}_{N/2}[p(x)]$ と $\mathrm{FFT}_{N/2}[q(x)]$ に分割し、それらの結果を用いて (6) で計算することができる。これが高速フーリエ変換である。

A 複素数に関する等式について

ここでは複素数に関する等式をいくつか示す。

定理 1 任意の複素数 $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ について等式

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

が成立する。

証明 実数 $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$ が存在して $z_1 = a + bi,\, z_2 = c + di$ と書ける。以下のように左辺と右辺が同じ式へ変形できる。

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{LHS} & = & \overline{z_1 z_2} \\ & = & \overline{(a+bi)(c+di)} \\ & = & \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\ & = & (ac-bd)-(ad+bc)i \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{RHS} & = & \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ & = & \overline{(a+bi)} \cdot \overline{(c+di)} \\ & = & (a-bi)(c-di) \\ & = & (ac-bd)-(ad+bc)i \end{array}$$

□

定理 2 任意の複素数 $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ について等式

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

が成立する。

証明 実数 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ が存在し、$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ と書ける。以下のように左辺と右辺が同じ式へ変形できる。

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \overline{z_1 + z_2} \\
&= \overline{(a + bi + (c + di)} \\
&= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\
&= (a + c) - (b + d)i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{RHS} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
&= \overline{(a + bi)} + \overline{(c + d)i} \\
&= (a - bi) + (c - di) \\
&= (a + c) - (b + d)i
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[1] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons Ltd., tenth edition, 2011.

[2] 金谷健一. **これなら分かる応用数学教室**. 共立出版, 2003.