

中間試験解答例

情報工学科 篠埜 功

2017年5月29日

問1 (10点) 3点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 4)$ に最も近い1次関数を求めよ。近さの尺度としては、 y 座標の差の2乗の和の半分を用いよ。

解答例 求める関数を $f(x) = ax + b$ 、与えられた3点を $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 1)$, $(x_3, y_3) = (3, 4)$ とおく。関数 $f(x)$ と3点の y 座標の差の2乗和の半分

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (f(x_i) - y_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2$$

を最小にするような a, b を求めればよい。 J を最小にするには、 J の a, b での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \frac{\partial J}{\partial b} = 0$$

を解けばよい。まず、 a での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial a} (ax_i + b - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 2(ax_i + b - y_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) \\ &= a \sum_{i=1}^3 x_i^2 + b \sum_{i=1}^3 x_i - \sum_{i=1}^3 x_i y_i \end{aligned}$$

である。次に、 b での偏微分は、

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2 \right\}$$

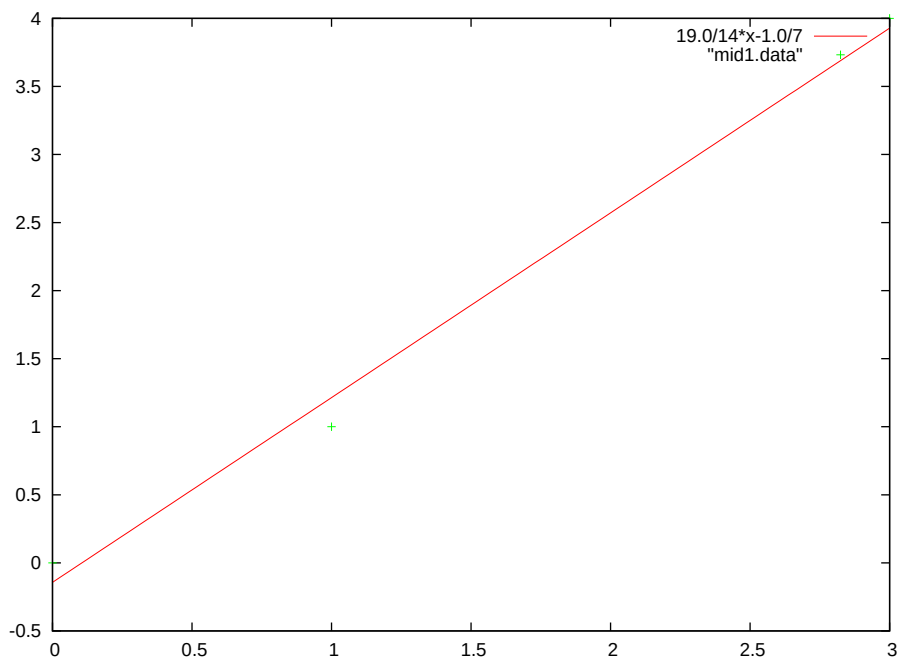


図 1: $f(x) = \frac{19}{14}x - \frac{1}{7}$ と与えられた 3 点の比較

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial b} (ax_i + b - y_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 2(ax_i + b - y_i) \\
 &= \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i) \\
 &= a \sum_{i=1}^3 x_i + b \sum_{i=1}^3 1 - \sum_{i=1}^3 y_i
 \end{aligned}$$

である。これらを 0 とおくと、

$$10a + 4b - 13 = 0$$

$$4a + 3b - 5 = 0$$

が得られ、これを解くと、 $a = \frac{19}{14}, b = -\frac{1}{7}$ となる。よって求める関数は、

$$f(x) = \frac{19}{14}x - \frac{1}{7}$$

である。

補足 これを 3 点とともに図示すると図 1 のようになる。図 1 において、緑色の + 記号が与えられた点であり、赤色の直線が上記の 1 次関数 $f(x)$ である。

問 2 (10 点) 4 点 $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 1)$ に最も近い 2 次関数を求めよ。近さの尺度としては、 y 座標の差の 2 乗の和の半分を用いよ。

解答例 求める関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$ 、与えられた4点を $(x_1, y_1) = (-1, 0)$, $(x_2, y_2) = (0, -1)$, $(x_3, y_3) = (1, 0)$, $(x_4, y_4) = (2, 1)$ とおく。関数 $f(x)$ と4点の y 座標の差の2乗和の半分

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (f(x_i) - y_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

を最小にするような a, b, c を求めればよい。 J を最小にするには、 J の a, b, c での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

を解けばよい。まず、 a での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial a} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \frac{\partial}{\partial a} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 (ax_i^4 + bx_i^3 + cx_i^2 - x_i^2 y_i) \\ &= a \sum_{i=1}^4 x_i^4 + b \sum_{i=1}^4 x_i^3 + c \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \sum_{i=1}^4 x_i^2 y_i \end{aligned}$$

である。次に、 b での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial b} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \frac{\partial}{\partial b} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^4 (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i - x_i y_i) \\ &= a \sum_{i=1}^4 x_i^3 + b \sum_{i=1}^4 x_i^2 + c \sum_{i=1}^4 x_i - \sum_{i=1}^4 x_i y_i \end{aligned}$$

である。次に、 c での偏微分は、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial c} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \frac{\partial}{\partial c} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot 1 \\
 &= \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
 &= a \sum_{i=1}^4 x_i^2 + b \sum_{i=1}^4 x_i + c \sum_{i=1}^4 1 - \sum_{i=1}^4 y_i
 \end{aligned}$$

である。これらを0とおくと、

$$18a + 8b + 6c - 4 = 0 \quad \cdots (1)$$

$$8a + 6b + 2c - 2 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$6a + 2b + 4c = 0 \quad \cdots (3)$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{10}, \quad c = -\frac{7}{10}$$

を得る。以上より、求める関数は

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$$

である。

補足 これを4点とともに図示すると、図2のようになる。図2において、緑色の+記号が与えられた点であり、赤色の曲線が上記の2次関数 $f(x)$ である。

問3 (10点) 列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を列ベクトル $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

の線形結合 $(\sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$ の形) で近似せよ。つまり、 $c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$ が $\mathbf{a}$ に最も近くなるような c_1, c_2 を求めよ。近さの尺度は差のノルムの2乗の半分、

つまり $J = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k - \mathbf{a} \right\|^2$ とせよ。ノルムの定義は、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のとき、

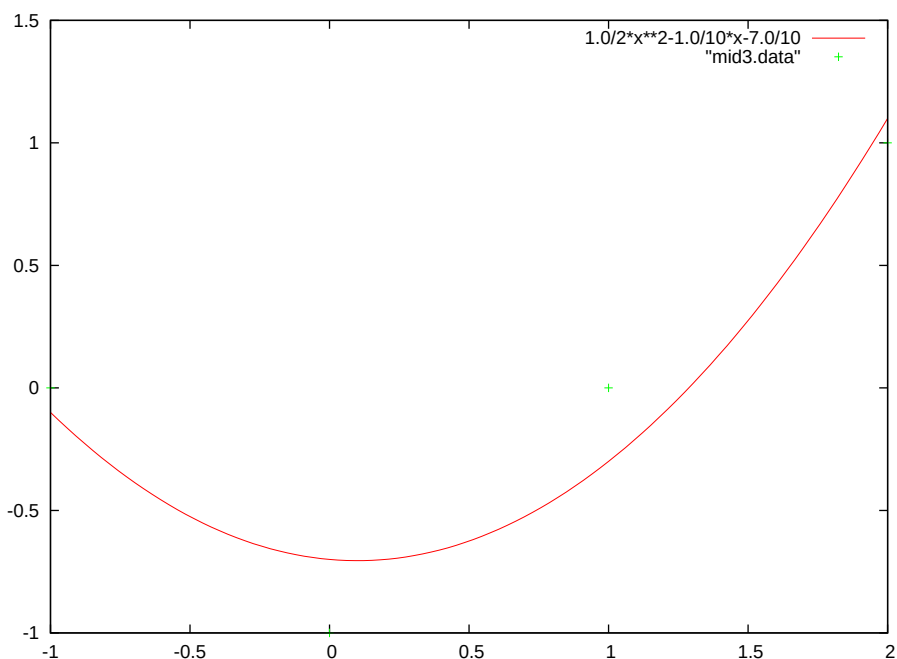


図 2: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$ と与えられた 4 点の比較

$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 x_k^2}$ である。また、以下の正規方程式 (normal equation) を使って良いものとする。

$$\begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a, u_1) \\ (a, u_2) \end{pmatrix}$$

教科書 1.3.1 節のようにベクトル a, u_1, u_2 を変数のままで連立一次方程式にしてから数値を入れて解く方法 (解答例 1) と、最初に a, u_1, u_2 を具体的なベクトルに置き換えてしまう方法 (解答例 2) の 2 通りの解法を示す。解答例 1 の方が見通しがよい。

解答例 1 まず J を展開すると

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^2 c_k u_k - a \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^2 c_k u_k - a, \sum_{k=1}^2 c_k u_k - a \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^2 c_k u_k, \sum_{k=1}^2 c_k u_k \right) - 2 \left(a, \sum_{k=1}^2 c_k u_k \right) + \|a\|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k,l=1}^2 c_k c_l (u_k, u_l) - 2 \sum_{k=1}^2 c_k (a, u_k) + \|a\|^2 \right\} \end{aligned}$$

となる。これを c_i ($i = 1, 2$) で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k,l=1}^2 c_k c_l (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l) - 2 \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{a}, \mathbf{u}_k) + \|\mathbf{a}\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k,l=1}^2 c_k c_l (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l) - 2 \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{a}, \mathbf{u}_k) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 2 \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i) - 2 (\mathbf{a}, \mathbf{u}_i) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i) - (\mathbf{a}, \mathbf{u}_i)
\end{aligned}$$

となる。よって、 $\frac{\partial J}{\partial c_1} = 0$ と $\frac{\partial J}{\partial c_2} = 0$ をまとめて行列表現で書くと

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{u}_1) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{u}_2) \end{pmatrix}$$

となる。これに問題の数値を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる。これを解くと、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。以上より、 $\mathbf{a}$ に最も近い $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の線形結合は、

$$4\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。

解答例 2 $\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ に具体的な数値を代入して J を展開すると、

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2} \|c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\| c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 3 \\ c_1 - 2 \\ c_1 - 6 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \{ c_1^2 + c_2^2 + 9 + 2c_1 c_2 - 6c_1 - 6c_2 + c_1^2 - 4c_1 + 4 + c_1^2 - 12c_1 + 36 \} \\
&= \frac{1}{2} \{ 3c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 - 22c_1 - 6c_2 + 49 \}
\end{aligned}$$

となる。これを c_1, c_2 で偏微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial c_1} &= \frac{1}{2}\{6c_1 + 2c_2 - 22\} = 3c_1 + c_2 - 11 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} &= \frac{1}{2}\{2c_1 + 2c_2 - 6\} = c_1 + c_2 - 3\end{aligned}$$

となる。これらを 0 とおくと以下の連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned}3c_1 + c_2 &= 11 \\ c_1 + c_2 &= 3\end{aligned}$$

これを解くと、 $c_1 = 4, c_2 = -1$ となる。以上より、 $\mathbf{a}$ に最も近い $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の線形結合は、

$$4\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。

問 4 (10 点) 以下の積分を計算せよ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$$

解答例

$\cos$ の加法定理より、

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

である。これらを足し合わせると

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

を得る。両辺を 2 で割ると

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

を得る。 α と β を x とすると

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 0) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\end{aligned}$$

となる。これを積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x + 1 dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx + \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \right\} \\ &= \frac{1}{2}(0 + 2\pi) \\ &= \pi\end{aligned}$$

となる。