

応用数学 例題3

情報工学科 篠埜 功

2016年4月25日

問 関数 $\sin x$ に区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で最も近い1次関数を求めよ。近さの尺度としては、 y 座標の差の2乗の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における積分（の半分）を用いよ。

解答 求める1次関数を $f(x) = ax + b$ とおく。関数 $f(x)$ と $\sin x$ の y 座標の差の2乗の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における積分の半分

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - \sin x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\}^2 dx \end{aligned}$$

を最小にするような a, b を求めればよい。 J を最小にするには、 J の a, b での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0$$

を解けばよい。まず、 a での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \{ax + b - \sin x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax + b - \sin x\} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx - x \sin x\} dx \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + b \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \end{aligned}$$

である。ここでそれぞれの積分を計算すると、 x^2 については、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

であり、 x については、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

である。 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ については、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= \left[x \frac{\cos x}{-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-1} dx \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\pi^3}{24}a + \frac{\pi^2}{8}b - 1$$

となる。次に、 b での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial b} \{ax + b - \sin x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax + b - \sin x\} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\} dx \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + b \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\pi^2}{8}a + \frac{\pi}{2}b - 1 \end{aligned}$$

である。これらを0とおくと、以下のような a, b に関する連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\pi^3}{24}a + \frac{\pi^2}{8}b - 1 &= 0 \\ \frac{\pi^2}{8}a + \frac{\pi}{2}b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{96 - 24\pi}{\pi^3}, \quad b = \frac{8\pi - 24}{\pi^2}$$

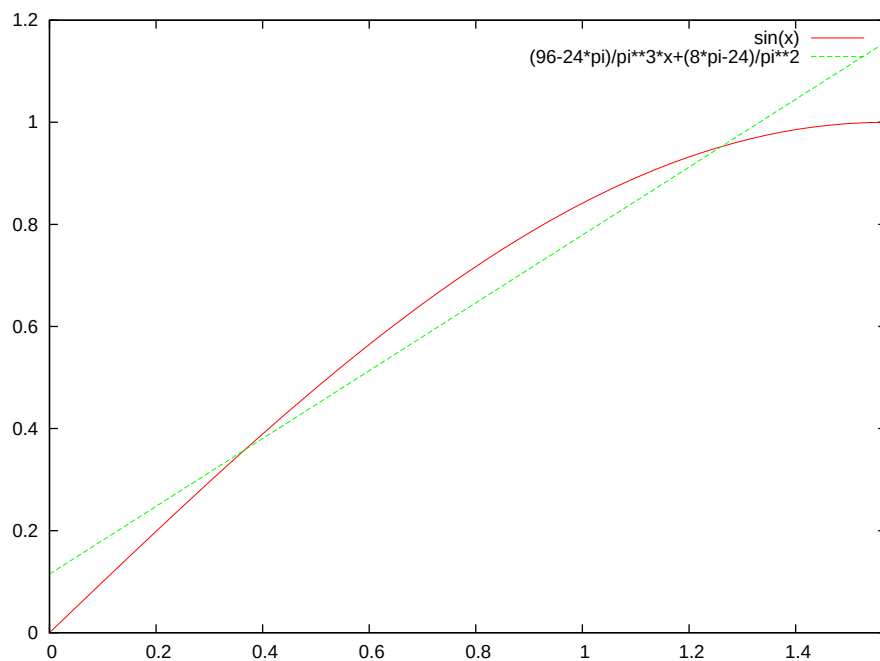


図 1: 区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で関数 $\sin x$ に最も近い 1 次関数

となる。以上より、求める 1 次関数は

$$f(x) = \frac{96 - 24\pi}{\pi^3}x + \frac{8\pi - 24}{\pi^2}$$

である。これを関数 $\sin x$ とともに区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ において図示すると、図 1 のようになる。図 1 において、緑色の直線が求めた 1 次関数であり、赤色の曲線が関数 $\sin x$ である。