

例題 13

情報工学科 篠埜 功

2016 年 7 月 11 日

例題 区間 $[-\pi, \pi]$ における $f(x) = x^2$ のフーリエ級数は

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx \quad (1)$$

である。これを複素指数関数 $\{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}$ の線形結合の形に変換せよ。

解答例

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2)$$

より、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= e^{i(-\theta)} \\ &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

等式 (2) と (3) を加えると

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$$

が得られる。等式 (2) から (3) を引くと

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

が得られる。従って以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned} \quad (4)$$

等式 (4) において θ に kx を代入すると

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

が得られる。これを式 (1) に代入すると

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

が得られる。この式を以下のように書き換えて整理する。

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} (-1)^k (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{k^2} (-1)^k e^{ikx} + \frac{2}{k^2} (-1)^k e^{-ikx} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{k^2} (-1)^k e^{ikx} + \frac{2}{(-k)^2} (-1)^{(-k)} e^{i(-k)x} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{k^2} (-1)^k e^{ikx} + \frac{2}{(-k)^2} (-1)^{(-k)} e^{i(-k)x} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2} (-1)^k e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{2}{k^2} (-1)^k e^{ikx} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

ここで c_k は以下のように定義される。

$$c_k = \begin{cases} \frac{2}{k^2} (-1)^k & k > 0 \\ \frac{\pi^2}{3} & k = 0 \\ \frac{2}{k^2} (-1)^k & k < 0 \end{cases}$$

補足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n a_k$ は通常 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ と書く。つまり上記の式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ は、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

と書いてもよい。