

例題 13-2

情報工学科 篠埜 功

2016 年 7 月 11 日

例題

- (1) 区間 $[-L, L]$ における関数 $f(x) = x$ のフーリエ級数を以下の形で求めよ。

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x\}$$

ここで ω_k は $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ と定義される。

- (2) 区間 $[-L, L]$ における関数 $f(x) = x$ のフーリエ級数を以下の形で求めよ。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x}$$

ここで ω_k は $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ と定義される。

解答例

- (1) 仮に

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x\}$$

とおく。(この等式を満たす $a_0, \dots, a_n$ は存在しないが、仮に上記の等式が成り立つとする。)

まず、両辺を区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2}a_0 dx \\ &= La_0 \end{aligned}$$

従って a_0 は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L x dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

次に両辺に $\cos \omega_k x$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \omega_k x dx &= \int_{-L}^L a_k \cos^2 \omega_k x dx \\ &= L a_k \end{aligned}$$

従って a_k は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \omega_k x dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \cos \omega_k x dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

最後に両辺に $\sin \omega_k x$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \omega_k x dx &= \int_{-L}^L b_k \sin^2 \omega_k x dx \\ &= L b_k \end{aligned}$$

従って b_k は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \omega_k x dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin \omega_k x dx \\ &= \frac{1}{L} \left\{ \left[x \frac{-\cos \omega_k x}{\omega_k} \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{-\cos \omega_k x}{\omega_k} dx \right\} \\ &= \frac{1}{L} \left\{ L \cdot \frac{-\cos k\pi}{\omega_k} - (-L) \cdot \frac{-\cos(-k\pi)}{\omega_k} \right\} \\ &= \frac{1}{L} \left\{ L \cdot \frac{-\cos k\pi}{\omega_k} + L \cdot \frac{-\cos k\pi}{\omega_k} \right\} \\ &= -\frac{2 \cos k\pi}{\omega_k} \\ &= -\frac{2}{\omega_k} (-1)^k \end{aligned}$$

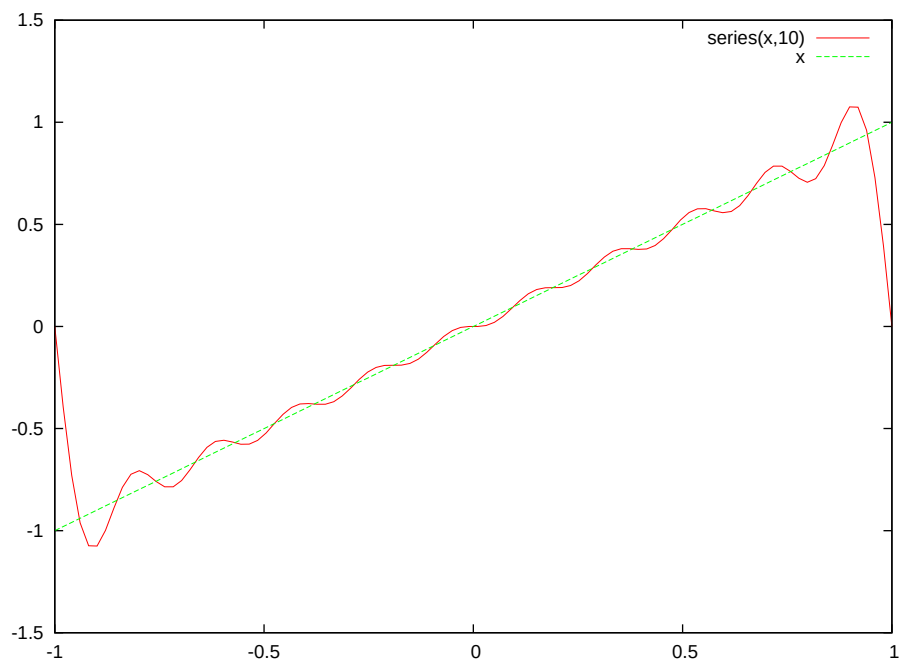


図 1: 関数 $f(x) = x$ と $\cos \omega_{10}x$ の項までの部分和の比較

以上より、 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{2}{\omega_k} (-1)^k \sin \omega_k x \right\}$$

である。関数 $f(x)$ のフーリエ級数は上記で得られた線形結合において n を大きくしたときの極限であり、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{2}{\omega_k} (-1)^k \sin \omega_k x \right\}$$

である。

この級数の $\cos \omega_{10}x$ までの項の部分 and を $L = 1.0$ の場合について図 1 に示す。

(2) 仮に

$$f(x) = \sum_{l=-n}^n c_l e^{i\omega_l x}$$

とおく。(この等式を満たす $c_{-n}, \dots, c_0, \dots, c_n$ は存在しないが、仮に上記の等式

が成り立つとする。) この等式の両辺に $e^{-i\omega_k x}$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_k x} dx &= \int_{-L}^L e^{-i\omega_k x} \sum_{l=-n}^n c_l e^{i\omega_l x} dx \\
 &= \int_{-L}^L \sum_{l=-n}^n c_l e^{i\omega_l x} e^{-i\omega_k x} dx \\
 &= \int_{-L}^L \sum_{l=-n}^n c_l e^{i(\omega_l - \omega_k)x} dx \\
 &= \int_{-L}^L \sum_{l=-n}^n c_l e^{i\omega_{l-k}x} dx \\
 &\quad (\omega_l - \omega_k = \frac{l\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{(l-k)\pi}{L} \text{なので}) \\
 &= \sum_{l=-n}^n \int_{-L}^L c_l e^{i\omega_{l-k}x} dx \\
 &= \int_{-L}^L c_k e^0 dx \\
 &= \int_{-L}^L c_k dx \\
 &= 2Lc_k
 \end{aligned}$$

従って c_k は以下のように得られる。

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_k x} dx$$

$k \neq 0$ のとき、 c_k は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_k x} dx \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x e^{-i\omega_k x} dx \\
&= \frac{1}{2L} \left\{ \left[x \frac{e^{-i\omega_k x}}{-i\omega_k} \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{e^{-i\omega_k x}}{-i\omega_k} dx \right\} \\
&= \frac{1}{2L} \cdot \frac{L e^{-i\omega_k L} - (-L) e^{i\omega_k L}}{-i\omega_k} \quad (\text{since } \int_{-L}^L e^{-i\omega_k x} dx = 0) \\
&= \frac{1}{2L} \cdot \frac{L e^{-i \frac{k\pi}{L} L} - (-L) e^{i \frac{k\pi}{L} L}}{-i\omega_k} \\
&= \frac{1}{2L} \cdot \frac{L e^{-ik\pi} - (-L) e^{ik\pi}}{-i\omega_k} \\
&= \frac{1}{2L} \cdot \frac{L(-1)^k + L(-1)^k}{-i\omega_k} \\
&= \frac{1}{2L} \cdot \frac{2L(-1)^k}{-i\omega_k} \\
&= \frac{(-1)^k}{-i\omega_k} \\
&= \frac{1}{\omega_k} (-1)^k i
\end{aligned}$$

$k = 0$ のとき、 c_0 は以下のように計算される。

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x dx = 0$$

従って関数 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

である。ここで c_k は以下のように定義される。

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{\omega_k} (-1)^k i & k \neq 0 \\ 0 & k = 0. \end{cases}$$

関数 $f(x)$ のフーリエ級数は上記で得られた線形結合において n を大きくしたときの極限であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

である。