

練習問題 9-2

情報工学科 篠埜 功

2016年6月13日

練習問題 練習問題 9-1 の計量空間において、関数 $f_1(x) = x$ と $f_2(x) = x^2$ について $\|f_1 + f_2\|$ と $\|f_1\| + \|f_2\|$ を計算し、それらの値を比較せよ。

解答例

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\| &= \sqrt{(f_1 + f_2, f_1 + f_2)} \\&= \sqrt{\int_0^1 \{(f_1 + f_2)(x)\} \{(f_1 + f_2)(x)\} dx} \\&= \sqrt{\int_0^1 \{f_1(x) + f_2(x)\} \{f_1(x) + f_2(x)\} dx} \\&= \sqrt{\int_0^1 (x + x^2)(x + x^2) dx} \\&= \sqrt{\int_0^1 x^2 + 2x^3 + x^4 dx} \\&= \sqrt{\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1} \\&= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}} \\&= \sqrt{\frac{10 + 15 + 6}{30}} \\&= \sqrt{\frac{31}{30}} \\ \|f_1\| + \|f_2\| &= \sqrt{(f_1, f_1)} + \sqrt{(f_2, f_2)} \\&= \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} \\&= \sqrt{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1} + \sqrt{\left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$\|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\|^2$ と $(\|\mathbf{f}_1\| + \|\mathbf{f}_2\|)^2$ を比較する。

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{f}_1\| + \|\mathbf{f}_2\|)^2 - \|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\|^2 &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{31}{30}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 2\sqrt{\frac{1}{15}} - \frac{31}{30} \\ &= \frac{10 + 6 - 31}{30} + 2\sqrt{\frac{1}{15}} \\ &= -\frac{15}{30} + 2\sqrt{\frac{1}{15}} \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{15}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $\left(2\sqrt{\frac{1}{15}}\right)^2$ と $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ を比較する。

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{\frac{1}{15}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{4}{15} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{16 - 15}{60} \\ &= \frac{1}{60} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

よって、 $2\sqrt{\frac{1}{15}} - \frac{1}{2} \geq 0$ となり、

$$\|\mathbf{f}_1\| + \|\mathbf{f}_2\| \geq \|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\|$$

が成り立つ。

以上により、上記の例について三角不等式 (Triangle inequality) が成り立つことが確認された。