

練習問題6の解答例

情報工学科 篠埜 功

2016年5月23日

練習問題 関数 $f(x) = x^2$ を区間 $[-\pi, \pi]$ においてフーリエ級数展開せよ。

解答例 教科書例 2.4 のやり方の解法を示す。仮に、

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

とおく。(1)の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 dx \\ &= a_0 \pi \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

となる。

(1)の両辺に $\cos kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx \\ &= a_k \pi \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[x^2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k} dx \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \quad \left(\left[x^2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} \text{ は } 0 \text{ なので} \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx$ を別に計算すると、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx &= \left[x \frac{-\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} dx \\
 &= -\frac{1}{k} [x \cos kx]_{-\pi}^{\pi} \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} dx \text{ は } 0 \text{ なので} \right) \\
 &= -\frac{1}{k} (\pi \cos \pi k - (-\pi) \cos(-\pi k)) \\
 &= -\frac{1}{k} (\pi \cos \pi k + \pi \cos \pi k) \\
 &= -\frac{2\pi}{k} \cos \pi k \\
 &= -\frac{2\pi}{k} (-1)^k
 \end{aligned}$$

である。よって、 a_k の計算の続きをすると、

$$\begin{aligned}
 a_k &= -\frac{2}{\pi k} \left(-\frac{2\pi}{k} (-1)^k \right) \\
 &= \frac{4}{k^2} (-1)^k
 \end{aligned}$$

となる。

(1) の両辺に $\sin kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \\
 &= b_k \pi
 \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx \\
 &= 0 \quad (x^2 \sin kx \text{ は奇関数なので})
 \end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると、 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx$$

である。

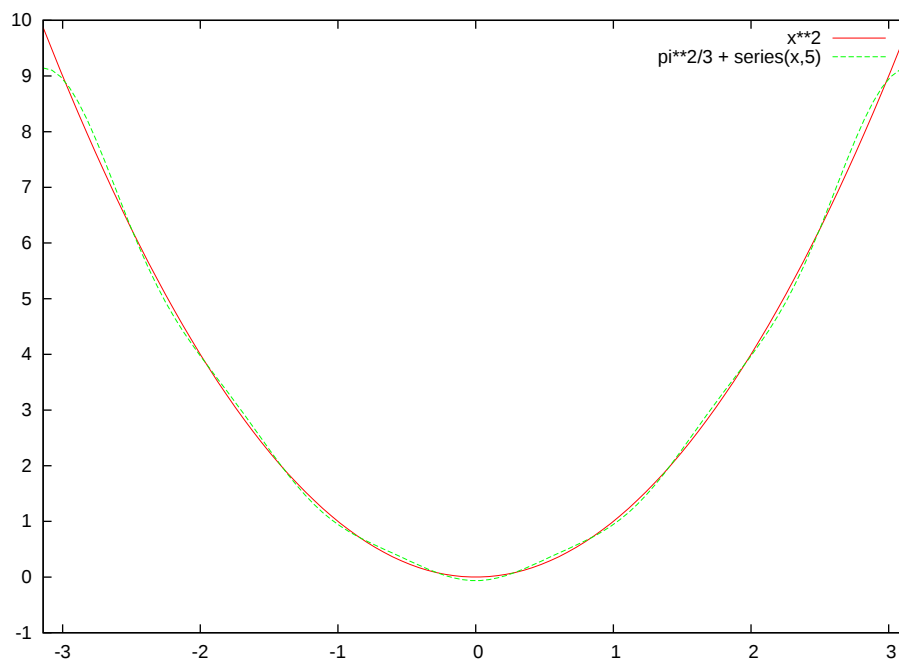


図 1: $f(x) = x^2$ とそのフーリエ級数の $\cos 5x$ の項までの部分和の比較

$f(x) = x^2$ のフーリエ級数展開は、上記で得られた線形結合の n を大きくしたときの極限であり、

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx$$

である。

補足 このフーリエ級数の $\cos 5x$ の項までの部分和

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^5 \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{4}{25} \cos 5x$$

と $f(x) = x^2$ をグラフにすると図 1 のようになる。