

応用数学 練習問題3 解答例

情報工学科 篠埜 功

2016年4月25日

問 関数 $\cos x$ に区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で最も近い二次関数を求めよ。近さの尺度としては、 y 座標の差の2乗の区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ における積分（の半分）を用いよ。

解答 求める二次関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。関数 $f(x)$ と $\cos x$ の y 座標の差の2乗の区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ における積分の半分

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - \cos x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \end{aligned}$$

を最小にするような a, b, c を求めればよい。 J を最小にするには、 J の a, b, c での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

を解けばよい。まず、 a での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax^2 + bx + c - \cos x\}x^2 dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}x^2 dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^4 + bx^3 + cx^2 - x^2 \cos x\} dx \\ &= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx + b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx + c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \end{aligned}$$

である。ここでそれぞれの積分を計算すると、 x^4 については、

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx \quad (x^4 \text{ は偶関数なので}) \\ &= 2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^5}{80}\end{aligned}$$

である。 x^3 は奇関数なので、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx = 0$$

である。 x^2 については、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{12}$$

である。 $x^2 \cos x$ については、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \quad (x^2 \cos x \text{ は偶関数なので})$$

である。まず、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx\end{aligned}$$

となる。ここで $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= \left[x \frac{\cos x}{-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-1} dx \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

である。よって、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ の続きの計算をすると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \cdot 1 \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\end{aligned}$$

となる。よって、 $\frac{\partial J}{\partial a}$ は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - 2\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \\ &= \frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - \frac{\pi^2}{2} + 4\end{aligned}$$

となる。次に、 b での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial b} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial b} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax^2 + bx + c - \cos x\} x dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\} x dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^3 + bx^2 + cx - x \cos x\} dx \\
&= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx + b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \\
&= 2b \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx \quad (x^3, x, x \cos x \text{ は奇関数、} x^2 \text{ は偶関数なので}) \\
&= 2b \cdot \frac{\pi^3}{24} \\
&= \frac{\pi^3}{12} b
\end{aligned}$$

である。次に、 c での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial c} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax^2 + bx + c - \cos x\} \cdot 1 dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\} dx \\
&= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x dx + c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + \pi c - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= 2a \cdot \frac{\pi^3}{24} + \pi c - 2 [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{12} a + \pi c - 2
\end{aligned}$$

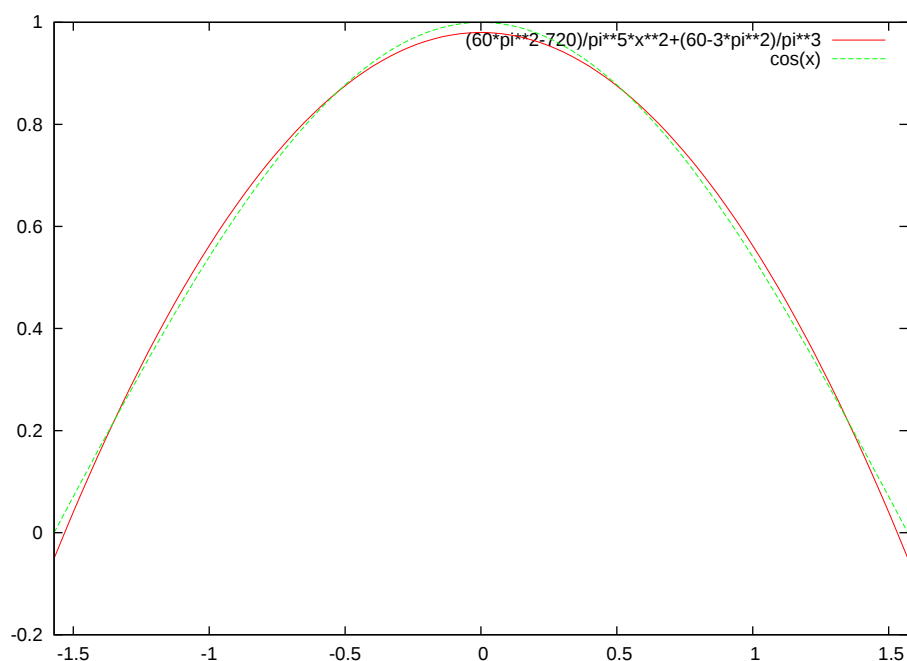


図 1: 区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で関数 $\cos x$ に最も近い 2 次関数

である。これらを 0 とおくと、以下のような a, b, c に関する連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - \frac{\pi^2}{2} + 4 &= 0 \\ \frac{\pi^3}{12}b &= 0 \\ \frac{\pi^3}{12}a + \pi c - 2 &= 0\end{aligned}$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{60\pi^2 - 720}{\pi^5}, \quad b = 0, \quad c = \frac{60 - 3\pi^2}{\pi^3}$$

となる。以上より、求める 2 次関数は

$$f(x) = \frac{60\pi^2 - 720}{\pi^5}x^2 + \frac{60 - 3\pi^2}{\pi^3}$$

である。これを関数 $\cos x$ とともに区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ において図示すると、図 1 のようになる。図 1 において、赤色の曲線が求めた 2 次関数であり、緑色の曲線が関数 $\cos x$ である。