

応用数学 練習問題2 解答例

情報工学科 篠埜 功

2016年4月18日

この資料では、今日の練習問題の解答をグラフとともに示す。正規方程式 (normal equation) の形にしてから値を入れて計算する場合 (解答 1) と最初から値を入れて計算する場合 (解答 2) の両方の解答を示す。解答 1 の方が見通しが良い。

問 以下の 4 点に最も近い 2 次関数を求め、4 点とともに図示せよ。近さの尺度としては講義で説明した、 y 座標の差の 2 乗の和 (の半分) を用いよ。

$$(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 1)$$

解答 1 求める関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$ 、与えられた 4 点を $(x_1, y_1) = (-1, 0)$, $(x_2, y_2) = (0, -1)$, $(x_3, y_3) = (1, 0)$, $(x_4, y_4) = (2, 1)$ とおく。関数 $f(x)$ と 4 点の y 座標の差の 2 乗和の半分

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (f(x_i) - y_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

を最小にするような a, b, c を求めればよい。 J を最小にするには、 J の a, b, c での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

を解けばよい。まず、 a での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial a} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \frac{\partial}{\partial a} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^4 (ax_i^4 + bx_i^3 + cx_i^2 - x_i^2 y_i) \\
&= a \sum_{i=1}^4 x_i^4 + b \sum_{i=1}^4 x_i^3 + c \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \sum_{i=1}^4 x_i^2 y_i
\end{aligned}$$

である。次に、 b での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial b} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \frac{\partial}{\partial b} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^4 (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i - x_i y_i) \\
&= a \sum_{i=1}^4 x_i^3 + b \sum_{i=1}^4 x_i^2 + c \sum_{i=1}^4 x_i - \sum_{i=1}^4 x_i y_i
\end{aligned}$$

である。次に、 c での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial c} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \frac{\partial}{\partial c} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)1 \\
&= \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
&= a \sum_{i=1}^4 x_i^2 + b \sum_{i=1}^4 x_i + c \sum_{i=1}^4 1 - \sum_{i=1}^4 y_i
\end{aligned}$$

である。これらを 0 とおくと、 a, b, c に関する連立一次方程式となる。係数を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 x_i^4 &= 18, & \sum_{i=1}^4 x_i^3 &= 8, & \sum_{i=1}^4 x_i^2 &= 6, & \sum_{i=1}^4 x_i &= 2 \\ \sum_{i=1}^4 1 &= 4, & \sum_{i=1}^4 x_i^2 y_i &= 4, & \sum_{i=1}^4 x_i y_i &= 2, & \sum_{i=1}^4 y_i &= 0 \end{aligned}$$

である。よって、連立一次方程式は

$$18a + 8b + 6c - 4 = 0 \quad \cdots (1)$$

$$8a + 6b + 2c - 2 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$6a + 2b + 4c = 0 \quad \cdots (3)$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{10}, \quad c = -\frac{7}{10}$$

を得る。以上より、求める関数は

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$$

である。これを 4 点とともに図示すると、図 1 のようになる。図 1 において、緑色の $\times$ 記号が与えられた点であり、赤色の曲線が求めた 2 次関数である。

解答 2 求める関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。関数 $f(x)$ と 4 点との y 座標の差の 2 乗和の半分を J とおく。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \left\{ \{f(-1) - 0\}^2 + \{f(0) - (-1)\}^2 + \{f(1) - 0\}^2 + \{f(2) - 1\}^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (a - b + c)^2 + (c + 1)^2 + (a + b + c)^2 + (4a + 2b + c - 1)^2 \right\} \end{aligned}$$

この J が最小になる a, b, c を求めればよい。 J を最小にするは、 J の a, b, c での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

を解けばよい。まず、 a での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ (a - b + c)^2 + (c + 1)^2 + (a + b + c)^2 + (4a + 2b + c - 1)^2 \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} (a - b + c)^2 + \frac{\partial}{\partial a} (c + 1)^2 + \frac{\partial}{\partial a} (a + b + c)^2 + \frac{\partial}{\partial a} (4a + 2b + c - 1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2(a - b + c) + 2(a + b + c) + 2(4a + 2b + c - 1) \cdot 4 \right\} \\ &= (a - b + c) + (a + b + c) + (4a + 2b + c - 1) \cdot 4 \\ &= (a - b + c) + (a + b + c) + (16a + 8b + 4c - 4) \\ &= 18a + 8b + 6c - 4 \end{aligned}$$

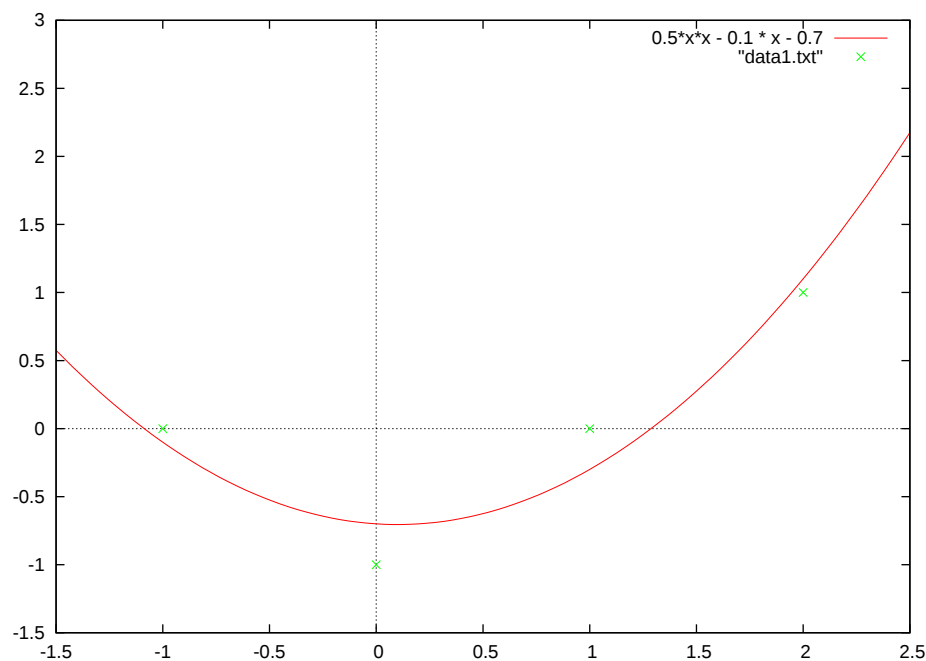


図 1: 与えられた 4 点に最も近い 2 次関数

である。

(注意) $(c+1)^2$ は a については定数であり、

$$\frac{\partial}{\partial a}(c+1)^2 = 0$$

である。

次に、 b での偏微分は、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ (a-b+c)^2 + (c+1)^2 + (a+b+c)^2 + (4a+2b+c-1)^2 \right\} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial b} (a-b+c)^2 + \frac{\partial}{\partial b} (c+1)^2 + \frac{\partial}{\partial b} (a+b+c)^2 + \frac{\partial}{\partial b} (4a+2b+c-1)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 2(a-b+c) \cdot (-1) + 2(a+b+c) + 2(4a+2b+c-1) \cdot 2 \right\} \\
 &= (a-b+c) \cdot (-1) + (a+b+c) + (4a+2b+c-1) \cdot 2 \\
 &= (-a+b-c) + (a+b+c) + (8a+4b+2c-2) \\
 &= 8a+6b+2c-2
 \end{aligned}$$

である。

(注意) $(c+1)^2$ は b については定数であり、

$$\frac{\partial}{\partial b}(c+1)^2 = 0$$

である。

次に、 c での偏微分は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ (a-b+c)^2 + (c+1)^2 + (a+b+c)^2 + (4a+2b+c-1)^2 \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial c} (a-b+c)^2 + \frac{\partial}{\partial c} (c+1)^2 + \frac{\partial}{\partial c} (a+b+c)^2 + \frac{\partial}{\partial c} (4a+2b+c-1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2(a-b+c) + 2(c+1) + 2(a+b+c) + 2(4a+2b+c-1) \right\} \\ &= (a-b+c) + (c+1) + (a+b+c) + (4a+2b+c-1) \\ &= 6a+2b+4c\end{aligned}$$

である。

これらを 0 とおくと、

$$18a+8b+6c-4 = 0 \quad \cdots (1)$$

$$8a+6b+2c-2 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$6a+2b+4c = 0 \quad \cdots (3)$$

となる。これは 3 変数の連立一次方程式であり、これを解けばよい。

以下で、この連立一次方程式を解く手順を示す。通常はガウスの消去法などを用いるが、ここでは中学生が解くような方法で示す。以下の解き方は一例である。

まず、(1), (2), (3) を 2 で割る。

$$9a+4b+3c-2 = 0 \quad \cdots (4)$$

$$4a+3b+c-1 = 0 \quad \cdots (5)$$

$$3a+b+2c = 0 \quad \cdots (6)$$

まず、(5), (6) から c を消去する。(5) の 2 倍から (6) を引くと、

$$5a+5b-2=0 \quad \cdots (7)$$

となる。次に、(4), (5) から c を消去する。(5) の 3 倍から (4) を引くと、

$$3a+5b-1=0 \quad \cdots (8)$$

となる。(7), (8) は a, b に関する 2 変数の連立一次方程式である。(7) から (8) を引くと、

$$2a-1=0$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{1}{2}$$

となる。これを (8) に代入すると

$$\frac{3}{2} + 5b - 1 = 0$$

となり、

$$b = -\frac{1}{10}$$

となる。これらを (5) に代入すると

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) + c - 1 = 0$$

となり、これを解くと

$$c = -\frac{7}{10}$$

となる。以上より、求める関数は

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$$

である。これを 4 点とともに図示すると、図 1 のようになる。