

練習問題 14-1

情報工学科 篠埜 功

2016 年 7 月 18 日

練習問題 以下の関数 $f(x)$ のフーリエ変換を計算せよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここでは、フーリエ変換、フーリエ逆変換は以下の定義を用いる¹。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

これらは変換の定義であり、等式ではない。 $f(x)$ は $f(x)$ のフーリエ変換の逆フーリエ変換とは必ずしも等しくない。

¹定義中の定数は教科書によって異なる。

解答例

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
 &= \int_0^L xe^{-i\omega x}dx \\
 &= \left[x \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_0^L - \int_0^L \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} dx \\
 &= \frac{Le^{-i\omega L}}{-i\omega} - \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-\omega^2} \right]_0^L \\
 &= \frac{Le^{-i\omega L}}{-i\omega} + \left[\frac{e^{-i\omega x}}{\omega^2} \right]_0^L \\
 &= i \frac{Le^{-i\omega L}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\
 &= i \frac{\omega Le^{-i\omega L}}{\omega^2} + \frac{e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\
 &= \frac{i\omega Le^{-i\omega L} + e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\
 &= \frac{e^{-i\omega L}(1 + i\omega L) - 1}{\omega^2} \\
 &= \frac{e^{-iL\omega}(1 + iL\omega) - 1}{\omega^2}
 \end{aligned}$$

補足 関数 $F(\omega)$ のフーリエ逆変換は以下のように得られる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iL\omega}(1 + iL\omega) - 1}{\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \begin{cases} x & 0 < x < L \\ L/2 & x = L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このフーリエ逆変換は上記の積分を計算して得たのではなく、 $f(x)$ から得たものである。一般に、フーリエ級数と同様、以下の等式が成り立つ。

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$