

練習問題 13-1

情報工学科 篠埜 功

2016年7月11日

練習問題 区間 $[-\pi, \pi]$ における関数 $f(x) = x$ のフーリエ級数は

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \sin kx \quad (1)$$

である。これを複素指数関数 $\{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}$ の線形結合の形に変換せよ。

解答例 1

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2)$$

より、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= e^{i(-\theta)} \\ &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

等式 (2) と (3) を加えると

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$$

が得られる。等式 (2) から (3) を引くと

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

が得られる。従って以下の2つの等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned} \quad (4)$$

等式 (4) において θ に kx を代入すると

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

が得られる。これを式 (1) に代入すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

が得られる。この式を以下のように書き換えて整理する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k}(-1)^k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{i} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k}(-1)^k (-i)(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^k i(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k}(-1)^k i e^{ikx} - \frac{1}{k}(-1)^k i e^{-ikx} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k}(-1)^k i e^{ikx} - \frac{1}{k}(-1)^k i e^{i(-k)x} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k}(-1)^k i e^{ikx} + \frac{1}{-k}(-1)^k i e^{i(-k)x} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k}(-1)^k i e^{ikx} + \frac{1}{-k}(-1)^{-k} i e^{i(-k)x} \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

ここで c_k は以下のように定義される。

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{k}(-1)^k i & k > 0 \\ 0 & k = 0 \\ \frac{1}{k}(-1)^k i & k < 0 \end{cases}$$

補足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ の表記は以下のように定義される。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

解答例 2

複素指数関数による級数を直接得る解法を示す。仮に、

$$f(x) = \sum_{l=-n}^n c_l e^{ilx}$$

とおく。(この等式を満たす $c_{-n}, \dots, c_0, \dots, c_n$ は存在しないが、仮に上記の等式が成り立つとする。) この等式の両辺に e^{-ikx} をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \sum_{l=-n}^n c_l e^{ilx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-n}^n c_l e^{ilx} e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-n}^n c_l e^{i(l-k)x} dx \\ &= \sum_{l=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} c_l e^{i(l-k)x} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^0 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} c_k dx \\ &= 2\pi c_k \end{aligned}$$

従って c_k は以下のように得られる。

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

$k \neq 0$ のとき、 c_k は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[x \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi e^{-ik\pi} - (-\pi)e^{ik\pi}}{-ik} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi(-1)^k + \pi(-1)^k}{-ik} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi(-1)^k}{-ik} \\
 &= \frac{(-1)^k}{-ik} \\
 &= \frac{1}{k}(-1)^k i
 \end{aligned}$$

$k = 0$ のとき、 c_0 は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^0 dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

従って関数 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

である。ここで c_k は以下のように定義される。

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{k}(-1)^k i & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

関数 $f(x)$ のフーリエ級数は上記で得られた線形結合において n を大きくしたときの極限であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

である。これは解答例 1 で得られた級数と同じである。

補足 以下で、得られた級数を元の級数 (1) に戻してみる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n c_k e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{-n} c_k e^{ikx} \right\} + c_0 e^0 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{i(-k)x} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \{ c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{i(-k)x} \} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} (-1)^k i e^{ikx} + \frac{1}{-k} (-1)^{-k} i e^{i(-k)x} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (-1)^k i (\cos kx + i \sin kx) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{k} (-1)^k i (\cos kx - i \sin kx) \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (-1)^k i \cos kx - \frac{1}{k} (-1)^k \sin kx \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{k} (-1)^k i \cos kx - \frac{1}{k} (-1)^k \sin kx \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k} (-1)^k \sin kx
 \end{aligned}$$

これは級数 (1) である。