

練習問題 11

情報工学科 篠埜 功

2016 年 6 月 27 日

練習問題 区間 $[-\pi, \pi]$ 上の $f(x) = x^2$ のフーリエ級数に対するパーセバルの等式を使って以下の級数の値を手順 (1)-(5) に従って求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

- (1) 以下の直交関数系の線形結合のうち、関数 $f(x)$ に最も近いものを求めよ。近さの尺度としては、講義で説明した、 y 座標の差の 2 乗を区間 $[-\pi, \pi]$ において積分したもの (の半分) を用いよ。

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \right\}$$

- (2) 関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数を示せ。(上記 (1) で求めた線形結合の n を大きくしたときの極限が関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数である。)

- (3) (2) で得られた級数を正規化せよ。

- (4) (3) で得られた級数に対するパーセバルの等式を書け。

- (5) 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ の値を求めよ。

補足 内積空間 $\mathcal{L}$ および $\mathcal{L}$ 内のベクトル u について、 $\mathcal{L}$ の正規直交基底 $\{e_i | i \geq 1\}$ の線形結合

$$\sum_{k=1}^n c_k e_k$$

のうち、 u との差のノルムの 2 乗 J が最も小さいベクトルが n が大きくなるに従って u に収束するとき ($\lim_{n \rightarrow \infty} J = 0$ のとき) 以下の等式 (パーセバルの等式) が成り立つ。

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

解答例

(1) 仮に、以下の等式が成り立つと仮定する。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

(この等式を満たす $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ は存在しないが、仮にこの等式が成り立つ場合を考える。) 等式 (1) の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 dx \\ &= a_0 \pi \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

となる。

等式 (1) の両辺に $\cos kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx \\ &= a_k \pi \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[x^2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k} dx \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \quad \left(\left[x^2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} \text{ は } 0 \text{ なので} \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx$ を別に計算すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \left[x \frac{-\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{k} [x \cos kx]_{-\pi}^{\pi} \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} dx \text{ は } 0 \text{ なので} \right) \\
&= -\frac{1}{k} (\pi \cos \pi k - (-\pi) \cos(-\pi k)) \\
&= -\frac{1}{k} (\pi \cos \pi k + \pi \cos \pi k) \\
&= -\frac{2\pi}{k} \cos \pi k \\
&= -\frac{2\pi}{k} (-1)^k
\end{aligned}$$

である。よって、 a_k の計算の続きをすると、

$$\begin{aligned}
a_k &= -\frac{2}{\pi k} \left(-\frac{2\pi}{k} (-1)^k \right) \\
&= \frac{4}{k^2} (-1)^k
\end{aligned}$$

となる。

等式 (1) の両辺に $\sin kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \\
&= b_k \pi
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx \\
&= 0 \quad (x^2 \sin kx \text{ は奇関数なので})
\end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると、 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\frac{2}{3} \pi^2 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx.$$

である。

(2) $f(x) = x^2$ のフーリエ級数展開は、(1) で得られた線形結合の n を大きくしたときの極限であり、

$$\frac{2}{3} \pi^2 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx.$$

である。

(3) $\frac{1}{2}$ と $\cos kx$ のノルムを計算すると

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{1}{2} \right\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)} \\
 &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \right)^2 dx} \\
 &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} dx} \\
 &= \sqrt{\left[\frac{1}{4} x \right]_{-\pi}^{\pi}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
 \|\cos kx\| &= \sqrt{(\cos kx, \cos kx)} \\
 &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx} \\
 &= \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

となり、(2) で求めた $f(x) = x^2$ のフーリエ級数は以下のように正規化される。

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{3}\pi^2 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx \\
 &= \frac{2}{3}\pi^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \sqrt{\pi} \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}
 \end{aligned}$$

(4) パーセバルの等式より、以下の等式を得る。

$$\|f\|^2 = \left(\frac{2}{3}\pi^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k^2} (-1)^k \sqrt{\pi} \right)^2 \quad (2)$$

等式 (2) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
 \|f\|^2 &= (f, f) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx \\
 &= \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \left(\frac{\pi^5}{5} - \left(-\frac{\pi^5}{5} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{5}\pi^5
 \end{aligned}$$

となる。等式 (2) の右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\text{RHS} &= \left(\frac{2}{3}\pi^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k^2}(-1)^k\sqrt{\pi}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}\pi^4 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^4}\pi \\ &= \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\end{aligned}$$

となる。従って、 $f(x) = x^2$ のフーリエ級数に対するパーセバルの等式は以下のようになる。

$$\frac{2}{5}\pi^5 = \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

(5)

$$\begin{aligned}16\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} &= \frac{2}{5}\pi^5 - \frac{2}{9}\pi^5 \\ &= \frac{18}{45}\pi^5 - \frac{10}{45}\pi^5 \\ &= \frac{8}{45}\pi^5\end{aligned}$$

より、級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ の値は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} &= \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{8}{45}\pi^5 \\ &= \frac{1}{90}\pi^4\end{aligned}$$

補足 得られた値 $\frac{1}{90}\pi^4$ はゼータ関数 $\zeta(n)$ の $n = 4$ の時の値である。ゼータ関数は以下の関数である。

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

つまり、 $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{90}\pi^4$ である。