

練習問題 10-2

情報工学科 篠埜 功

2015 年 6 月 22 日

練習問題 区間 $[-\pi, \pi]$ 上の実数値連続関数の集合を考える。練習問題 9-2 と同様に、和、スカラー倍、内積を以下のように導入し、計量空間を構築する。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(x) &= f(x) + g(x) \\(c\boldsymbol{f})(x) &= c(f(x)) \\(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx\end{aligned}$$

この計量空間において、関数 $f(x) = x^2$ を $e_1(x) = \frac{1}{2}$, $e_2(x) = \cos x$, $e_3(x) = \sin x$ の線形結合 $(\sum_{k=1}^3 c_k e_k(x) = c_1 e_1(x) + c_2 e_2(x) + c_3 e_3(x))$ の形の関数) で近似せよ。つまり、 $c_1 e_1(x) + c_2 e_2(x) + c_3 e_3(x)$ が $f(x)$ に最も近くなるような c_1, c_2, c_3 を求めよ。近さの尺度としては、以下の式で表される、 $c_1 \boldsymbol{e}_1 + c_2 \boldsymbol{e}_2 + c_3 \boldsymbol{e}_3$ と $\boldsymbol{f}$ の差のノルムの 2 乗 (の半分) を用いよ。

$$J = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^3 c_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{f} \right\|^2$$

ノルムは以下のように定義される。

$$\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f})} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx}$$

以下で回答例を 3 つ示す。1 つ目の回答では、 $i = 1, 2, 3$ について $\frac{\partial J}{\partial c_i} = 0$ を解く。2 つ目の回答では特別な場合を考えて解く。3 つ目の回答では、 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で張られる部分空間への $\boldsymbol{f}$ の射影を計算して解く。

解答例 1 まず以下のように J を計算する。

$$J = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^3 c_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{f} \right\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k - \mathbf{f}, \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k - \mathbf{f} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k, \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k \right) - 2 \left(\mathbf{f}, \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k \right) + \|\mathbf{f}\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 c_k c_l (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) - 2 \sum_{k=1}^3 c_k (\mathbf{f}, \mathbf{e}_k) + \|\mathbf{f}\|^2 \right\}
\end{aligned}$$

これを $c_i (i = 1, 2, 3)$ について偏微分する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 c_k c_l (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) - 2 \sum_{k=1}^3 c_k (\mathbf{f}, \mathbf{e}_k) + \|\mathbf{f}\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k,l=1}^3 c_k c_l (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) - 2 \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^3 c_k (\mathbf{f}, \mathbf{e}_k) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 2 \sum_{k=1}^3 c_k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) - 2 (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^3 c_k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) - (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i)
\end{aligned}$$

$\frac{\partial J}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ を行列の形式で書くと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{f}, \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{f}, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix}$$

ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ はお互いに直交しているので、

$$\begin{pmatrix} \|\mathbf{e}_1\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{e}_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|\mathbf{e}_3\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{f}, \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{f}, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix}$$

となり、 $c_i = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{e}_i)}{\|\mathbf{e}_i\|^2} \quad (i = 1, 2, 3)$ を得る。

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}, \mathbf{e}_1) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \\
(\mathbf{f}, \mathbf{e}_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx \\
&= \left[x^2 \frac{\sin x}{-1} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin x}{-1} dx \\
&= 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\left\{[x \cos x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx\right\} \\
&= 2\left\{\pi \cos \pi - (-\pi) \cos(-\pi)\right\} \\
&= 2\{2\pi \cos \pi\} \\
&= 4\pi \cos \pi \\
&= -4\pi \\
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx = 0 \\
(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} dx = \left[\frac{x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} \\
(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\frac{\pi^3}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi^2 \\
c_2 &= \frac{-4\pi}{\pi} = -4 \\
c_3 &= 0
\end{aligned}$$

を得る。よって $\boldsymbol{f}$ に最も近い $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の線形結合は

$$\frac{2}{3}\pi^2 \boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2$$

となる。このベクトルは以下の関数を表している。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\pi^2 \boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2\right)(x) &= \frac{2}{3}\pi^2 e_1(x) - 4e_2(x) \\
&= \frac{1}{3}\pi^2 - 4 \cos x
\end{aligned}$$

これは、関数 $f(x)$ のフーリエ級数における、 $\cos x, \sin x$ の項までの関数である。

解答例 2 以下の等式が成り立つと仮定する。

$$\boldsymbol{f} = c_1 \boldsymbol{e}_1 + c_2 \boldsymbol{e}_2 + c_3 \boldsymbol{e}_3$$

(この等式を満たす c_1, c_2, c_3 は存在しないが、仮に上記の等式が成り立つ場合を考える。) 上記の等式の両辺とベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ との内積をとる。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) &= c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \\
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) &= c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) &= c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)
\end{aligned}$$

これらの3つの等式を行列の形式で書くと以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & (e_3, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & (e_3, e_2) \\ (e_1, e_3) & (e_2, e_3) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, e_1) \\ (f, e_2) \\ (f, e_3) \end{pmatrix}$$

これは回答例1で得られた等式と同じである。残りの計算は省略する。

解答例 3

e_1, e_2, e_3 で張られる部分空間へのベクトル f の射影が f に最も近い線形結合である。つまり、ベクトル $u - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)$ が e_1, e_2, e_3 で張られる部分空間と直交するときに e_1, e_2, e_3 の線形結合が f に最も近い。よって次の2つの等式を満たす c_1, c_2, c_3 を求めればよい。

$$\begin{aligned} (f - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3), e_1) &= 0 \\ (f - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3), e_2) &= 0 \\ (f - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3), e_3) &= 0 \end{aligned}$$

上記の各等式の左辺の内積を内積の公理で展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} (f, e_1) - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, e_1) &= 0 \\ (f, e_2) - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, e_2) &= 0 \\ (f, e_3) - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, e_3) &= 0 \end{aligned}$$

2つ目の内積を右辺に移項すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} (f, e_1) &= (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, e_1) \\ (f, e_2) &= (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, e_2) \\ (f, e_3) &= (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, e_3) \end{aligned}$$

右辺の内積を内積の公理で展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} (f, e_1) &= c_1(e_1, e_1) + c_2(e_2, e_1) + c_3(e_3, e_1) \\ (f, e_2) &= c_1(e_1, e_2) + c_2(e_2, e_2) + c_3(e_3, e_2) \\ (f, e_3) &= c_1(e_1, e_3) + c_2(e_2, e_3) + c_3(e_3, e_3) \end{aligned}$$

これらを行列の形式で書くと以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & (e_3, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & (e_3, e_2) \\ (e_1, e_3) & (e_2, e_3) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, e_1) \\ (f, e_2) \\ (f, e_3) \end{pmatrix}$$

これは回答例1, 2で得られた等式と同じである。残りの計算は省略する。