応用数学 練習問題1 解答例

情報工学科　篠埜 功

2016 年 4 月 11 日

問　以下の 3 点に最も近い直線を求め、3 点とともに図示せよ。近さの尺度としては講義で説明した、y 座標の差の 2 乗の和 (の半分) を用いよ。

$$(0,1),(1,0),(2,-2)$$

以下では、授業で説明した正規方程式 (normal equation) の形にしてから値を入れて計算する場合 (解答 1) と最初から値を入れて計算する場合 (解答 2) の両方の解答を示す。解答 1 の方が見通しが良い。

解答 1　求める関数を $f(x) = ax+b$、与えられた 3 点を $(x_1, y_1) = (0,1), (x_2, y_2) = (1,0), (x_3, y_3) = (2,-2)$ とおく。関数 $f(x)$ と 3 点の y 座標の差の 2 乗和の半分

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - y_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)^2$$

を最小にするような a, b を求めればよい。J を最小にするには、J の a, b での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \frac{\partial J}{\partial b} = 0$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i + b - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i + b - y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i^2 + bx_i - x_iy_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{3}x_i - \sum_{i=1}^{3}x_iy_i
\end{aligned}$$

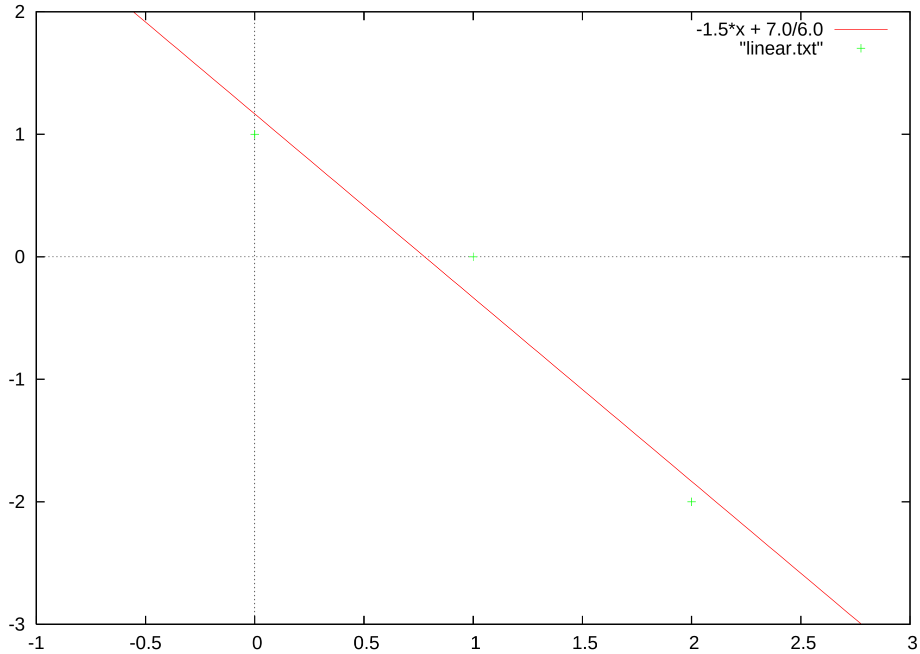

図 1: $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{6}$ と与えられた 3 点の比較

である。次に、b での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i + b - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i + b - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i + b\sum_{i=1}^{3}1 - \sum_{i=1}^{3}y_i
\end{aligned}$$

である。これらを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}
5a + 3b + 4 &= 0 \\
3a + 3b + 1 &= 0
\end{aligned}$$

が得られる。(これを正規方程式 (Normal equations) という。) これを解くと、$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{6}$ となる。よって求める関数は、

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$$

である。これを 3 点とともに図示すると図 1 のようになる。

解答 2　求める関数を $f(x)=ax+b$ とおく。関数 $f(x)$ と 3 点との y 座標の差の 2 乗和の半分を J とおく。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\Big\{\{f(0)-1\}^2+\{f(1)-0\}^2+\{f(2)-(-2)\}^2\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{(b-1)^2+(a+b)^2+(2a+b+2)^2\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{b^2-2b+1+a^2+2ab+b^2+4a^2+b^2+4+4ab+8a+4b\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{5a^2+3b^2+6ab+8a+2b+5\Big\} \end{aligned}$$

この J が最小になる a,b を求めればよい。J を最小にするは、J の a,b での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial J}{\partial b}=0$$

を解けばよい。a での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{1}{2}(10a+6b+8) \\ &= 5a+3b+4 \end{aligned}$$

である。b での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{1}{2}(6a+6b+2) \\ &= 3a+3b+1 \end{aligned}$$

である。これらを 0 とおくと、

$$\begin{aligned} 5a+3b+4 &= 0 \\ 3a+3b+1 &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。（これを正規方程式 (Normal equations) という。）以降は解答 1 と同じなので省略する。

補足 1　上記の正規方程式 (Normal equations) を行列で書くと

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。これを解くと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

が得られる。行列表記を使うかどうかはどちらでも良いが、3 変数以上になった場合、行列で書いた方が筆算で（ガウスの消去法などで）解くときに計算がしやすい。

補足 2　ここでは有効数字の桁数を考慮せず厳密な最適解を求めたが、実際の実験データ等の解析では取得データには誤差があるので、厳密な最適解を求めても

意味はなく、有効数字の桁数を考慮した計算を行う。この講義では誤差については考慮せず、厳密な最適解を計算することにする。

補足 3　教科書では、J の定義の中で y 座標の差を $y_i - f(x_i)$ としているが、上記回答では $f(x_i) - y_i$ としている。差を 2 乗しているので、どちらでも同じである。

補足 4　連立一次方程式をコンピュータで解く方法は、直接解法と反復解法の大きく 2 つに分けられる。直接解法はガウスの消去法等、線形代数で通常習う解法であり、反復解法はガウスザイデル法等、収束するまである演算を繰り返し適用する方法である。直接解法は筆算で厳密解を求める際にも使えるが、反復解法は近似解法であり、厳密解を求めるための解法ではない。