練習問題 10-1

情報工学科　篠埜 功

2015 年 6 月 22 日

練習問題　列ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ を列ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ の線形結合（$\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{e}_k = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2$）で近似せよ。近さの尺度としては、以下の式で表される、$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{u}$ の差のノルムの 2 乗（の半分）を用いよ。

$$J = \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{u}\right\|^2$$

列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のノルムは以下のように定義される。

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} x_k^2}$$

以下で回答例を 3 つ示す。1 つ目の回答では、練習問題 4 の回答例のように $i = 1, 2$ について $\dfrac{\partial J}{\partial c_i} = 0$ を解く。2 つ目の回答では特別な場合を考えて解く。3 つ目の回答では、$\boldsymbol{e}_1$ および $\boldsymbol{e}_2$ で張られる部分空間への $\boldsymbol{u}$ の射影を計算して解く。

解答例 1　まず以下のように J を計算する。

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{u}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{u}, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{u}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{e}_k, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{e}_k\right) - 2\left(\boldsymbol{u}, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{e}_k\right) + \|\boldsymbol{u}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) - 2\sum_{k=1}^{2} c_k (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_k) + \|\boldsymbol{u}\|^2\right\}
\end{aligned}$$

これを $c_i (i=1,2)$ について偏微分する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i}\frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) - 2\sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_k) + \|\boldsymbol{u}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) - 2\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_k)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_i) - 2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_i)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_i)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial J}{\partial c_1} = 0$ と $\dfrac{\partial J}{\partial c_2} = 0$ を行列の形式で書くと以下のようになる。

$$
\begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}
$$

ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は直交しているので、

$$
\begin{pmatrix} \|\boldsymbol{e}_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|\boldsymbol{e}_2\|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}.
$$

となり、$c_1 = \dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1)}{\|\boldsymbol{e}_1\|^2} = \dfrac{10}{3}$, $c_2 = \dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2)}{\|\boldsymbol{e}_2\|^2} = \dfrac{1}{2}$ を得る。よって、ベクトル $\boldsymbol{u}$ に最も近い $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の線形結合は

$$
c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \frac{10}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/6 \\ 10/3 \\ 17/6 \end{pmatrix}
$$

である。

解答例 2　以下の等式が成り立つと仮定する。

$$
\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2
$$

（この等式を満たす c_1, c_2 は存在しないが、仮に上記の等式が成り立つ場合を考える。）上記の各等式の両辺とベクトル $\boldsymbol{e}_1$ および $\boldsymbol{e}_2$ との内積をとる。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1) &= c_1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) + c_2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) \\
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2) &= c_1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + c_2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}
$$

これらの 2 つの等式を行列の形式で書くと以下のようになる。

$$
\begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}
$$

これは回答例 1 で得られた等式と同じである。残りの計算は省略する。

解答例 3

$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ で張られる部分空間へのベクトル $\boldsymbol{u}$ の射影が $\boldsymbol{u}$ に最も近い線形結合である。つまり、ベクトル $\boldsymbol{u}-(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2)$ が $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ で張られる部分空間と直交するときに $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の線形結合が $\boldsymbol{u}$ に最も近い。よって次の 2 つの等式を満たす c_1, c_2 を求めればよい。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}-(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{e}_1)=0\\
(\boldsymbol{u}-(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{e}_2)=0
\end{aligned}
$$

上記の各等式の左辺の内積を内積の公理で展開すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1)-(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=0\\
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2)-(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)=0
\end{aligned}
$$

2 つ目の内積を右辺に移項すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1)=(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)\\
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2)=(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}
$$

右辺の内積を内積の公理で展開すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1)=c_1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+c_2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)\\
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2)=c_1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+c_2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}
$$

これらを行列の形式で書くと以下のようになる。

$$
\begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}
$$

これは回答例 1, 2 で得られた等式と同じである。残りの計算は省略する。